

FAREY-SEQUENZEN

MATTHIAS KUNIK

ZUSAMMENFASSUNG. Wir untersuchen die sogenannten n -ten Farey-Sequenzen, bestehend aus der geordneten Folge aller gekürzten Brüche zwischen Null und Eins mit Nennern $\leq n$. Dabei ist n eine beliebige natürliche Zahl. Auch wenn wir hierfür nur einfache Rechenregeln für den Umgang mit Brüchen und Ungleichungen verwenden, wie sie aus dem Schulunterricht bekannt sind, so erhalten wir dennoch für die Farey-Sequenzen eine Fülle interessanter zahlentheoretischer Eigenschaften. Diese werden schließlich dazu verwendet, ein einfaches Rechenschema zu entwickeln, mit dem sich auch beliebige Ausschnitte aus der n -ten Farey-Sequenz sehr effizient berechnen lassen.

1. EINLEITUNG

Wenn wir die gekürzten Brüche zwischen Null und Eins mit einem vorgegeben maximalen natürlichen Nenner n der Größe nach ordnen, so erhalten wir etwa für $n = 5$:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}.$$

Dem Geologen John Farey (geboren 1766 in Woburn, Bedfordshire, England und gestorben am 6. Januar 1826 in London, England) fiel beim Betrachten solcher Folgen von Brüchen, die bis heute seinen Namen tragen, folgendes auf: Bei drei aufeinanderfolgenden Brüchen ergibt sich der Wert des mittleren Bruches als Quotient aus Zähler- und Nennersumme von den beiden links und rechts benachbarten Brüchen, z.B.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{2+3}{5+5}.$$

Diese anhand von Beispielen erkannte Eigenschaft hielt Farey in einem 1816 erschienenen Artikel mit dem Titel “On a curious property of vulgar fractions” im *Philosophical Magazine* fest. Der französische Mathematiker Cauchy las Fareys Aufsatz und lieferte noch im selben Jahr 1816 den bei Farey fehlenden Beweis.

Farey war nicht der erste, der diese Eigenschaft erkannt hat. So schrieb Haros 1802 einen Artikel über Dezimalbrüche, aus dem hervorgeht, dass er Fareys “curious property” für $n = 99$ verwendet hat.

Im Folgenden untersuchen wir die nach Farey benannten Folgen von Brüchen und beweisen ihre wichtigsten Eigenschaften. Die hierfür benötigten Hilfsmittel beschränken sich auf die aus dem Schulunterricht bekannten Bruchrechenregeln sowie auf den Umgang mit einfachen Ungleichungen. Dabei streifen wir auch das Gebiet der elementaren Zahlentheorie.

2. ERWEITERTER EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Eine rationale Zahl q kann als Quotient zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gemäß $q = \frac{a}{b}$ dargestellt werden, wobei der Nenner b sogar als natürliche Zahl gewählt werden kann, $b \geq 1$. Den größten gemeinsamen Teiler von a und b bezeichnet man in der Zahlentheorie mit $\text{ggT}(a, b)$ oder einfach nur mit (a, b) . Ist $(a, b) = 1$, so nennen wir a und b teilerfremd und die Darstellung $\frac{a}{b}$ der zugehörigen rationalen Zahl q einen gekürzten Bruch.

Bemerkung 2.1. Eine möglichst einfache sowie allgemeine Rechenvorschrift zur Bestimmung von (a, b) ist nicht nur für die Kürzung von Brüchen wichtig, sondern auch in der Zahlentheorie von eigenständiger Bedeutung.

Zwei geläufige Methoden zur Berechnung von (a, b) :

Wir können im Folgenden $a \geq 0$ und $b \geq 1$ voraussetzen, da man in der Zahlentheorie $(a, b) > 0$ vereinbart, so dass $(\pm a, b) = (a, \pm b) = (a, b)$ gilt. Überdies ist $(0, b) = b$ für alle $b \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A) *Berechnung von (a, b) durch Primfaktorzerlegung von a und b :* Mit $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ usw. bezeichnen wir die unendliche Primzahlfolge. Sind dann $a, b \in \mathbb{N}$ und

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m} \quad \text{bzw.} \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\beta_m}$$

die Primfaktorzerlegungen von a und b mit ganzzahligen Exponenten $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, so ist

$$(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_m^{\min(\alpha_m, \beta_m)},$$

wobei $\min(\alpha, \beta)$ das Minimum zweier reeller Zahlen α, β bezeichnet.

Beispiel 2.1. Bestimme $(3960, 1188)$.

$$\begin{aligned} a &= 3960 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 & \text{und} \\ b &= 1188 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 & \text{liefere} \end{aligned}$$

$$(3960, 1188) = (\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5 \cdot \underline{11}, \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{11}) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 396.$$

Bemerkung 2.2. Für sehr große Zahlen a, b ist die Primfaktorzerlegung zu aufwendig, im Extremfall undurchführbar (Zahlen mit einigen hundert Dezimalziffern), was man sich in der Kryptographie zu Nutze macht.

B) *Berechnung von (a, b) mit Hilfe des euklidischen Algorithmus:* Diesem Verfahren liegt die Idee der fortgesetzten Division mit Rest zugrunde. Für $a, b \geq 1$ hat man die Darstellung

$$(2.1) \quad b = q \cdot a + r \quad \text{mit } q, r \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ und } r < a,$$

und diese liefert $(b, a) = (a, r)$, wobei q Divisionskoeffizient und r Divisionsrest heißt. Denn (a, r) teilt die rechte Seite von (2.1) und damit auch die linke, also $(a, r) \leq (b, a)$. Stellt man (2.1) nach r um, so erhält man analog $(b, a) \leq (a, r)$. Beide Ungleichungen zusammen ergeben dann die behauptete Gleichheit. Auf das "reduzierte Zahlenpaar" a, r kann dieses Verfahren solange wiederholt angewendet werden, bis sich $r = 0$ ergibt, denn die Folge der Divisionsreste r nimmt in jedem Schritt echt ab. Die Divisionskoeffizienten lassen sich mit Hilfe der sogenannten Gaußklammer berechnen:

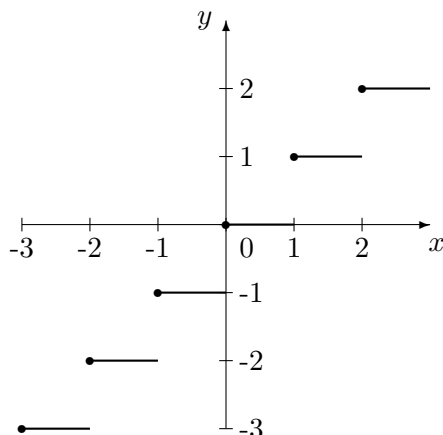


ABBILDUNG 1. Graphische Darstellung der Funktion $y = [x]$

Definition 2.1. Die Gaußklammer $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $k \leq x$.

Bemerkung 2.3. Die Gaußklammer einer reellen Zahl x ist also diejenige ganze Zahl k , für die folgende Ungleichung gilt:

$$k \leq x < k + 1.$$

Die Gaußklammer lässt die ganzen Zahlen unverändert, die reellen und nicht ganzen Zahlen werden dagegen stets abgerundet, z.B. ist $[0.75] = 0$ und $[-0.5] = -1$.

Beispiel 2.2. Bestimme $(462, 138)$.

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{Schlusskette: } (462, 138) \\
 462 & = & 3 \cdot 138 + 48 & = (138, 48) \\
 138 & = & 2 \cdot 48 + 42 & = (48, 42) \\
 48 & = & 1 \cdot 42 + 6 & = (42, 6) \\
 42 & = & 7 \cdot 6 + 0 & = (6, 0) = 6.
 \end{array}$$

Da 6 der letzte von 0 verschiedene Divisionsrest ist, folgt $(462, 138) = 6$.

In diesem Beispiel erhalten wir mit Hilfe der eben eingeführten Gaußklammer die Divisionskoeffizienten $[462/138] = 3$, $[138/48] = 2$, $[48/42] = 1$ und $[42/6] = 7$.

Bemerkung 2.4. Ist $m = (a, b)$, $b \geq 1$, so sind $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ teilerfremd, und der Bruch $\frac{a/m}{b/m}$ ist gekürzt.

Beispiel 2.3. Kürze den Bruch $\frac{138}{462}$ vollständig.

$$\frac{138}{462} = \frac{138/6}{462/6} = \frac{23}{77}.$$

Wir kommen nun auf das Beispiel zur Ermittlung von $(462, 138)$ zurück, und durchlaufen in der folgenden Berechnung, beginnend mit dem letzten Schritt, den euklidischen Algorithmus

in umgekehrter Reihenfolge:

$$6 = 48 - 1 \cdot 42 = 48 - (138 - 2 \cdot 48) = 3 \cdot 48 - 138 = 3 \cdot (462 - 3 \cdot 138) - 138 = 3 \cdot 462 - 10 \cdot 138.$$

Wir erhalten, dass sich der ggt von $b = 462$ und $a = 138$ in der Form $(a, b) = b \cdot s - a \cdot t$ schreiben lässt, hier mit $s = 3$, $t = 10$. Dieses Verfahren können wir auch im allgemeinen Fall auf den euklidischen Algorithmus anwenden. Wegen $a \cdot t = (-a) \cdot (-t)$ kommt es dabei auf das Vorzeichen von a nicht an, und wir erhalten das folgende Resultat:

Satz 2.1. *Sind a und b ganze Zahlen mit $b \geq 1$, so gibt es ganze Zahlen s und t mit*

$$(a, b) = b \cdot s - a \cdot t.$$

Jedoch ist die oben genannte Methode zur Berechnung von s und t nicht optimal, da die ganzzahligen Divisionskoeffizienten aus dem euklidischen Algorithmus in einer Liste vermerkt werden müssen, um den Algorithmus in umgekehrter Reihenfolge abarbeiten zu können. Der nun folgende *erweiterte euklidische Algorithmus* vermeidet dies, und hat darüber hinaus den Vorteil, eine enge Beziehung zu den Approximationen von Brüchen mit großen Nennern durch Brüche mit kleineren Nennern herzustellen:

Satz 2.2. *Es seien a und b ganze Zahlen mit $0 \leq a \leq b$ und $b \geq 1$. Wir definieren die Startwerte*

$$r_0 = b, \quad r_1 = a$$

bzw.

$$q_0 = 0, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1,$$

und berechnen rekursiv, solange $r_j > 0$ bleibt, beginnend mit $j = 1$ die Größen

$$q_j = \left\lfloor \frac{r_{j-1}}{r_j} \right\rfloor,$$

$$r_{j+1} = r_{j-1} - q_j r_j,$$

$$s_{j+1} = s_{j-1} + q_j s_j,$$

$$t_{j+1} = t_{j-1} + q_j t_j.$$

Die ganzen Zahlen r_j bzw. q_j sind hier wieder die Divisionsreste bzw. Divisionskoeffizienten des euklidischen Algorithmus. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) *Das Schema endet für einen Index $n_0 \geq 1$ mit dem Divisionsrest $r_{n_0} = 0$. Hierbei nimmt die Folge der Divisionsreste r_j ab dem Index $j = 1$ in jedem Schritt echt ab:*

$$r_0 \geq r_1 > \cdots > r_{n_0} = 0.$$

- (ii) *Es gilt $s_j t_{j+1} - t_j s_{j+1} = (-1)^j$ für alle $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, und $(s_j, t_j) = 1$ für alle $j = 0, 1, \dots, n_0$.*
- (iii) *Für alle $j = 1, \dots, n_0$ gilt $t_{j-1} \leq t_j$ sowie $0 \leq s_j/t_j \leq 1$ mit gekürzten Brüchen s_j/t_j .*
- (iv) *Es gilt $bs_j - at_j = (-1)^j r_j$ für alle $j = 0, 1, \dots, n_0$. Insbesondere ist $s_{n_0}/t_{n_0} = a/b$ mit dem gekürzten Bruch s_{n_0}/t_{n_0} sowie*

$$bs_{n_0-1} - at_{n_0-1} = (-1)^{n_0-1}(a, b)$$

mit $(a, b) = r_{n_0-1}$.

Bevor wir den Satz beweisen, kommen wir auf Beispiel 2.2 zurück, und beschreiben den erweiterten euklidischen Algorithmus mit Hilfe der folgenden Tabelle, in der jede Zeile, die hinter den ersten zwei Startzeilen steht, allein aus ihren beiden Vorgängerzeilen berechnet wird:

j	q_j	r_j	s_j	t_j	$bs_j - at_j$
0	0	462	1	0	462
1	3	138	0	1	-138
2	2	48	1	3	48
3	1	42	2	7	-42
4	7	6	3	10	6
5	—	0	23	77	0

Hier ergibt sich für $b = r_0 = 462$ und $a = r_1 = 138$ der Abbruchindex $n_0 = 5$. Aus der letzten Zeile liest man gemäß Satz 2.2(iv) den Bruch $s_5/t_5 = 23/77$ ab, der sich durch Kürzung des Bruches $a/b = 138/462$ wie in Beispiel 2.3 ergibt. Die letzte Spalte des Schemas ist eine reine Kontrollspalte, in der sich, wiederum nach Satz 2.2(iv), die Werte $(-1)^j r_j$ ergeben. Speziell aus der vorletzten Zeile zum geraden Index $n_0 - 1 = 4$ folgt die vom Satz 2.1 behauptete Form der ggt-Darstellung:

$$bs_4 - at_4 = 462s_4 - 138t_4 = 462 \cdot 3 - 138 \cdot 10 = 6 = (a, b).$$

Nun zeigen wir den Satz 2.2:

Beweis. Wir machen hier wiederholt vom induktiven Beweisprinzip Gebrauch:

- (i) Wegen $b \geq a$ ist $r_0 \geq r_1$ klar. Solange noch $r_j > 0$ für einen Index $j \geq 1$ ist, erhalten wir unter Beachtung von Bemerkung 2.3 zur Gaußklammer für den folgenden Rechenschritt im Algorithmus zum einen

$$r_{j+1} = r_{j-1} - \left\lfloor \frac{r_{j-1}}{r_j} \right\rfloor r_j \geq r_{j-1} - \frac{r_{j-1}}{r_j} r_j = 0,$$

und zum anderen

$$r_{j+1} = r_{j-1} - \left\lfloor \frac{r_{j-1}}{r_j} \right\rfloor r_j < r_{j-1} - \left(\frac{r_{j-1}}{r_j} - 1 \right) r_j = r_j.$$

Damit gibt es einen Index $n_0 \geq 1$ mit $r_{n_0} = 0$, und die Monotonieaussage in (i) ist ebenfalls gezeigt.

- (ii) Aus der ersten Gleichung dieser Teilaussage folgt sofort $(s_j, t_j) = 1$ für $j = 0, 1, \dots, n_0$. Wir zeigen die erste Gleichung: Für $j = 0$ ist sie wegen $s_0 t_1 - t_0 s_1 = 1 = (-1)^0$ erfüllt (Induktionsanfang). Wenn für einen Index $j \geq 1$ mit $r_j > 0$ die Gleichung

$$s_{j-1} t_j - t_{j-1} s_j = (-1)^{j-1}$$

bereits gezeigt ist (Induktionsannahme), so gilt sie wegen

$$s_j t_{j+1} - t_j s_{j+1} = s_j (t_{j-1} + q_j t_j) - t_j (s_{j-1} + q_j s_j) = -(s_{j-1} t_j - t_{j-1} s_j) = (-1)^j$$

auch für den Folgeindex $j + 1$ (Induktionsschritt).

- (iii) Zunächst halten wir fest, dass für $j = 0, \dots, n_0$ die ganzen Zahlen r_j, s_j, t_j nicht negativ sind, und dass nach (i) für $j = 1, \dots, n_0 - 1$ für die Divisionskoeffizienten die Ungleichung $q_j \geq 1$ gilt. Wir zeigen induktiv für alle $j = 1, \dots, n_0$ die zusammengesetzte Aussage

$$t_j \geq t_{j-1} \quad \text{und} \quad t_j - s_j \geq 0.$$

Diese Aussage stimmt für $j = 1$ nach Wahl der Startwerte. Ist die Gültigkeit dieser Aussage *bis* zu einem Index $j \geq 1$ mit $r_j > 0$ schon bestätigt, so gilt sie auch für $j + 1$, denn zum einen ist

$$t_{j+1} = t_{j-1} + q_j t_j \geq q_j t_j \geq t_j,$$

und zum anderen

$$t_{j+1} - s_{j+1} = (t_{j-1} - s_{j-1}) + q_j(t_j - s_j) \geq 0.$$

- (iv) Für $j = 0$ bzw. $j = 1$ ist die Beziehung $bs_j - at_j = (-1)^j r_j$ nach Wahl der Startwerte erfüllt. Wenn sie *bis* zu einem Index $j \geq 1$ mit $r_j > 0$ erfüllt ist, so folgt sie wegen

$$\begin{aligned} bs_{j+1} - at_{j+1} &= b(s_{j-1} + q_j s_j) - a(t_{j-1} + q_j t_j) \\ &= bs_{j-1} - at_{j-1} + q_j(bs_j - at_j) \\ &= (-1)^{j-1}(r_{j-1} - q_j r_j) = (-1)^{j+1} r_{j+1} \end{aligned}$$

auch für $j + 1$. Da $r_{n_0-1} = (a, b)$ der letzte von Null verschiedene Divisionsrest ist, ergeben sich die übrigen Aussagen von (iv) als Spezialfälle aus den letzten beiden Zeilen des erweiterten euklidischen Algorithmus. □

Bemerkung 2.5. Nach dem eben bewiesenen Satz gilt für die Indizes j mit $1 \leq j \leq n_0$

$$(2.2) \quad \frac{s_j}{t_j} - \frac{a}{b} = \frac{(-1)^j r_j}{b t_j}$$

mit der streng monoton fallenden Zahlenfolge $\frac{r_j}{t_j}$. Somit stellen die s_j/t_j mit Index $j < n_0$ Näherungsbrüche für a/b dar, die abwechselnd kleiner bzw. größer als a/b sind. Diese Brüche liegen bei ungeradem Index j links von a/b , und bei geradem Index j rechts von a/b gemäß

$$(2.3) \quad \frac{s_1}{t_1} < \frac{s_3}{t_3} < \dots < \frac{a}{b} < \dots < \frac{s_4}{t_4} < \frac{s_2}{t_2}.$$

Die s_j/t_j ergeben sich aus der endlichen Kettenbruchentwicklung von a/b , es gilt dabei

$$\frac{s_{j+1}}{t_{j+1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_{j-1} + \frac{1}{q_j}}}}$$

mit $q_0 = 0$ für $j = 1, \dots, n_0 - 1$. Da wir jedoch von diesen Kettenbruchdarstellungen keinen Gebrauch machen, dürfen wir den Beweis dem interessierten Leser überlassen.

3. PROBLEMSTELLUNG

Aufgabe: Man finde und ordne alle gekürzten Brüche $\frac{a}{b}$ mit $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ und $b \leq n$, n ein gegebener maximaler Nenner, der Größe nach.

Lösung mittels Farey-Sequenzen: Rekursive Konstruktion einer Tabelle Zeile für Zeile:

- In der ersten Zeile stehen nur $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$.
- Die n -te Zeile bildet man, indem man die $(n - 1)$ -te Zeile noch einmal darunter schreibt und den Bruch $\frac{a+a'}{b+b'}$ zwischen die aufeinanderfolgenden Brüche $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{a'}{b'}$ der abgeschriebenen $(n - 1)$ -ten Zeile setzt, falls $b + b' \leq n$ ist.

Beispiel 3.1. Konstruktion der Farey-Sequenz bis zur Zeile $n = 5$:

n	Brüche der n -ten Farey-Sequenz										
1	$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{1}$	
2	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	
3	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$		
4	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$		
5	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Definition 3.1. Die n -te Zeile dieser Tabelle nennt man die Farey-Sequenz (Farey-Folge) der Ordnung n .

Aufgabe: Man vervollständige die Tabelle bis $n = 7$.

4. VOLLSTÄNDIGKEIT DER FAREY-SEQUENZEN

Die folgenden Sätze zeigen, dass die Konstruktion der n -ten Farey-Sequenz zu dem gewünschten Ergebnis führt, nämlich der geordneten Sequenz aller gekürzten Brüche von $\frac{0}{1}$ bis $\frac{1}{1}$ mit maximalem Nenner kleiner oder gleich n . Dabei werden weitere Eigenschaften der Farey-Sequenzen hergeleitet, die im folgenden Abschnitt zu effizienten Rechenvorschriften führen.

Satz 4.1. Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ aufeinanderfolgende Brüche der n -ten Zeile, so gilt $a'b - ab' = 1$.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz mittels vollständiger Induktion. Der Satz gilt für $n = 1$ (Induktionsanfang). Wir nehmen an, er gilt bis zur Zeile $n - 1$. Die aufeinanderfolgenden Brüche der Zeile n sind dann

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'},$$

wobei $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ die aufeinanderfolgenden Brüche der $(n - 1)$ -ten Zeile durchläuft. Wir erhalten

$$a'b - ab' = 1 \quad (\text{Induktionsannahme})$$

$$\text{bzw.} \quad (a + a')b - a(b + b') = a'b - ab' = 1$$

$$\text{bzw.} \quad a'(b + b') - (a + a')b' = a'b - ab' = 1.$$

□

Aus Satz 4.1 folgen die nächsten beiden Sätze.

Satz 4.2. *Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ in der Tabelle ist gekürzt, d.h. es gilt $(a, b) = 1$.*

Beweis. Wäre einer der beiden Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ nicht gekürzt, so wäre die linke Seite von

$$a'b - ab' = 1$$

durch eine natürliche Zahl $m > 1$ teilbar. Dies müsste dann auch für die rechte Seite dieser Gleichung gelten. Das ist aber offensichtlich nicht der Fall und die Annahme der nicht gekürzten Brüche führt auf einen Widerspruch. \square

Satz 4.3. *Die Brüche in jeder Zeile sind der Größe nach geordnet, denn*

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \iff a'b - ab' > 0,$$

und für aufeinanderfolgende Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ gilt ja sogar $a'b - ab' = 1 > 0$.

Der folgende Satz erfüllt das Anliegen dieses Abschnitts.

Satz 4.4. *Die n -te Zeile des Farey-Schemas besteht genau aus allen gekürzten Brüchen $\frac{a}{b}$ mit $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ und $1 \leq b \leq n$. Die Brüche sind der Größe nach geordnet.*

Beweis. Dieser Beweis wird ebenfalls induktiv geführt. Die Behauptung stimmt für $n = 1$ bzw. $n = 2$ mit den Farey-Sequenzen $\frac{0}{1} < \frac{1}{1}$ bzw. $\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für die ersten n Zeilen bereits gezeigt ist, mit einer natürlichen Zahl $n \geq 2$. Dann muss zum Beweis von Satz 4.4 nur noch gezeigt werden, dass in der $(n + 1)$ -ten Zeile jeder gekürzte Bruch $\frac{c}{n+1}$ mit $1 \leq c \leq n$ auftaucht. Ist $\frac{c}{n+1}$ solch ein Bruch, so finden wir in der n -ten Farey-Sequenz zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ mit

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{n+1} < \frac{a'}{b'}.$$

Aus $b, b', a'b - ab' > 0$ folgt allgemein

$$(4.1) \quad \frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

Hierbei gilt

$$(4.2) \quad b + b' \geq n + 1,$$

denn aus $b + b' \leq n$ folgt ¹ $\max(b, b') \leq n - 1$, so dass nach Induktionsannahme $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ auch aufeinanderfolgende Brüche der $(n - 1)$ -ten Zeile wären und mithin $\frac{a+a'}{b+b'}$ bereits in der n -ten Farey-Sequenz stünde. Nach (4.1) wären dann $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ keine aufeinanderfolgende Brüche der n -ten Zeile.

¹Mit $\max(\alpha, \beta)$ bezeichnen wir das Maximum zweier reeller Zahlen α und β .

Fall 1: $\frac{a}{b} < \frac{c}{n+1} \leq \frac{a+a'}{b+b'}$. Hier erhalten wir mit Satz 4.1 und der Ungleichung (4.2)

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{c}{n+1} - \frac{a}{b} = \frac{cb - a(n+1)}{b(n+1)} \\ &\leq \frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b} = \frac{(a+a')b - a(b+b')}{b(b+b')} \\ &= \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)}. \end{aligned}$$

Betrachten wir von dieser Ungleichungskette zunächst nur den Teil

$$0 < \frac{cb - a(n+1)}{b(n+1)} \leq \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)},$$

so folgen der Reihe nach

$$cb - a(n+1) = 1, \quad b + b' = n + 1,$$

und wiederum mit Verwendung von Satz 4.1:

$$\begin{aligned} \frac{c}{n+1} &= \frac{1 + a(n+1)}{b(n+1)} = \frac{1 + a(b+b')}{b(b+b')} \\ &= \frac{a'b - ab' + a(b+b')}{b(b+b')} \\ &= \frac{(a+a')b}{b(b+b')} = \frac{a+a'}{b+b'}, \end{aligned}$$

so dass $\frac{c}{n+1} = \frac{a+a'}{b+b'}$ mit $b + b' = n + 1$ bereits in der $(n + 1)$ -ten Zeile steht.

Fall 2 : $\frac{a+a'}{b+b'} \leq \frac{c}{n+1} < \frac{a'}{b'}$. Hieraus folgt wie zuvor

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{a'}{b'} - \frac{c}{n+1} = \frac{a'(n+1) - cb'}{b'(n+1)} \\ &\leq \frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten wiederum der Reihe nach

$$a'(n+1) - cb' = 1, \quad b + b' = n + 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{n+1} &= \frac{a'(n+1) - 1}{b'(n+1)} = \frac{a'(b+b') - 1}{b'(b+b')} \\ &= \frac{a'(b+b') - (a'b - ab')}{b'(b+b')} \\ &= \frac{b'(a+a')}{b'(b+b')} = \frac{a+a'}{b+b'}, \end{aligned}$$

also steht auch in diesem Fall $\frac{c}{n+1}$ in der $(n + 1)$ -ten Zeile. □

5. BERECHNUNG DER FAREY-SEQUENZEN IN BELIEBIGEN ABSCHNITTEN

Im Folgenden werden Sätze hergeleitet, mit denen jede Farey-Sequenz in einem beliebigen Abschnitt berechnet werden kann, ohne dabei die vorhergehenden Farey-Sequenzen kennen zu müssen. Mit Hilfe dieser Resultate kann ein sehr effizienter Algorithmus auf dem Computer implementiert werden.

Satz 5.1. *Es seien $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ drei aufeinanderfolgende Brüche der n -ten Farey-Sequenz, $n \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt mit $a''b - ab'' > 0$:*

$$a' = \frac{a + a''}{a''b - ab''}, \quad b' = \frac{b + b''}{a''b - ab''}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

Beweis. Es folgt aus Satz 4.1:

$$(5.1) \quad a'b - ab' = 1, \quad a''b' - a'b'' = 1$$

sowie $\frac{a}{b} < \frac{a''}{b''}$ bzw. $a''b - ab'' > 0$. Damit liefert (5.1) ein lineares Gleichungssystem für a', b' mit der eindeutigen Lösung

$$a' = \frac{a + a''}{a''b - ab''}, \quad b' = \frac{b + b''}{a''b - ab''}.$$

□

Beachte: In Satz 5.1 darf $\text{ggT}(a + a'', b + b'') = a''b - ab'' > 1$ sein.

Satz 5.2. *Es seien $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ drei aufeinanderfolgende Brüche der n -ten Farey-Sequenz, $n \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gelten die folgenden Aussagen ²*

$$(i) \quad b'' = b' \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor - b,$$

$$(ii) \quad a'' = a' \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor - a.$$

$$(iii) \quad \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor = \frac{b''+b}{b'} = \frac{a''+a}{a'} = a''b - ab'' = \text{ggT}(a + a'', b + b'').$$

Bemerkung 5.1. Satz 5.2 (i) und (ii) liefert ein sehr einfaches Rekursionsschema zur Berechnung von $\frac{a''}{b''}$ aus den beiden vorhergehenden Brüchen $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ der n -ten Zeile. Wie im Satz 5.1 wird auch hier vorausgesetzt, dass $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ die gekürzten Brüche aus dem Farey-Schema sind. Mit Hilfe dieses Satzes können wir die komplette n -te Farey-Zeile direkt berechnen, ohne die Vorgängerzeilen konstruiert zu haben: Wir müssen dazu nur mit den beiden Randbrüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{n}$ starten, und dann iterativ alle Folgebrüche aus Satz 5.2 (i) und (ii) berechnen.

Beweis. (ii) folgt aus (i) und Satz 5.1, angewendet auf die aufeinanderfolgenden Farey-Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ der n -ten Zeile. Die letzten drei Gleichungen in (iii) folgen allein aus Satz 5.1. Die erste Gleichung in (iii) ist zu (i) äquivalent. Es muss also nur noch die erste Gleichung von

²wir erinnern an die Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$ in Definition 2.1.

(iii) gezeigt werden: Da $\frac{a''}{b''}$ in der n -ten Zeile steht, gilt $b'' \leq n$, woraus $\frac{b''+b}{b'} \leq \frac{n+b}{b'}$ folgt, und wir erhalten

$$(5.2) \quad \frac{b'' + b}{b'} \leq \left\lfloor \frac{n + b}{b'} \right\rfloor$$

aus der Ganzzahligkeit von $\frac{b''+b}{b'}$. Mit der Ungleichung (4.2) im Beweis von Satz 4.4 haben wir gezeigt, dass die Summe zweier aufeinanderfolgender Nenner aus der n -ten Farey-Sequenz größer als n ist, also gilt $b'' + b' > n$ sowie

$$(5.3) \quad \frac{b'' + b}{b'} + 1 > \frac{n + b}{b'}.$$

Wir beachten die Bemerkung 2.3 zur Definition der Gaußklammer und erhalten aus (5.2) sowie (5.3), dass $\frac{b''+b}{b'} = \left\lfloor \frac{n+b}{b'} \right\rfloor$ gelten muss. \square

Satz 5.3. *Es seien $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ drei aufeinanderfolgende Brüche der n -ten Farey-Sequenz, $n \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

$$(i) \quad b = b' \left\lfloor \frac{n + b''}{b'} \right\rfloor - b''.$$

$$(ii) \quad a = a' \left\lfloor \frac{n + b''}{b'} \right\rfloor - a''.$$

$$(iii) \quad \left\lfloor \frac{n + b''}{b'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + b}{b'} \right\rfloor.$$

Bemerkung 5.2. Satz 5.3 liefert im Unterschied zum vorigen Satz ein Rekursionsschema zur Berechnung von $\frac{a}{b}$ aus den beiden *nachfolgenden* Brüchen $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ der n -ten Zeile.

Beweis. Wir müssen wegen Satz 5.2 nur noch (iii) zeigen: Aus $b \leq n$ folgt $\frac{b''+b}{b'} \leq \left\lfloor \frac{n+b''}{b'} \right\rfloor$, da $\frac{b''+b}{b'} \in \mathbb{N}$ ist, und aus $b + b' > n$:

$$\frac{b'' + b}{b'} + 1 = \frac{b'' + b + b'}{b'} > \frac{n + b''}{b'} \geq \left\lfloor \frac{n + b''}{b'} \right\rfloor,$$

also

$$\frac{b'' + b}{b'} = \left\lfloor \frac{n + b''}{b'} \right\rfloor$$

bzw.

$$\left\lfloor \frac{n + b}{b'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + b''}{b'} \right\rfloor$$

nach Satz 5.2 (iii). \square

Nach den Sätzen 5.2 und 5.3 genügt somit die Kenntnis zweier aufeinanderfolgender Brüche der n -ten Farey-Sequenz, um alle nachfolgenden bzw. vorausgehenden Brüche der n -ten Zeile zu berechnen.

Die folgenden drei Sätze liefern nun einfach zu handhabende und allgemeine Prüfkriterien bzw. Berechnungsvorschriften für zwei benachbarte Brüche in der n -ten Farey-Sequenz. Das entscheidende Hilfsmittel für den abschließenden Satz 5.6 ist der erweiterte euklidische Algorithmus aus dem Abschnitt 2.

Satz 5.4. Gegeben seien zwei teilerfremde Zahlen $b, b' \in \mathbb{N}$.

(i) Es gibt eindeutig bestimmt ganze Zahlen a, a' mit

$$0 \leq a < b, \quad 0 < a' \leq b', \quad a'b - ab' = 1.$$

Für diese gilt $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \leq 1$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\max(b, b') \leq n \leq b + b' - 1$. Dann folgen die beiden Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ aus (i) in der n -ten Farey-Sequenz aufeinander.

(iii) Für kein $N \geq b + b'$ folgen die beiden Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ aus (i) in der N -ten Farey-Sequenz aufeinander. Es ist $\frac{a+a'}{b+b'}$ der Bruch mit dem kleinsten Nenner, der echt zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ liegt.

Beweis. (i) Nach dem Satz 2.1 gibt es Zahlen $a_0, a'_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a'_0 b - a_0 b' = 1$. Sind $a, a' \in \mathbb{Z}$ zwei weitere Zahlen mit $a'b - ab' = 1$, so folgt $(a' - a'_0)b = (a - a_0)b'$, und aufgrund der Teilerfremdheit von b und b' :

$$(5.4) \quad a = a_0 + \lambda b, \quad a' = a'_0 + \lambda b'$$

mit einer ganzen Zahl λ . Für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}$ ist durch (5.4) eine Lösung a, a' von $a'b - ab' = 1$ gegeben. Doch allein für $\lambda := -\lfloor \frac{a_0}{b} \rfloor$ erhalten wir die geforderten Ungleichungen

$$0 \leq a = a_0 - b \lfloor \frac{a_0}{b} \rfloor < b, \quad \frac{a}{b} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bb'} \leq \frac{a+1}{b} \leq 1.$$

(ii),(iii): Es sei zunächst $n := \max(b, b')$. Wir nehmen an, die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ aus (i) seien in der n -ten Farey-Sequenz nicht aufeinanderfolgend. Dann gibt es einen gekürzten Bruch $\frac{c}{d}$ mit $1 \leq d \leq n$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{a'}{b'}$. Der Abstand zwischen $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ ist $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a'b - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'}$, und folglich gilt einerseits

$$(5.5) \quad 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd} < \frac{1}{bb'}$$

und andererseits

$$(5.6) \quad 0 < \frac{a'}{b'} - \frac{c}{d} = \frac{a'd - cb'}{b'd} < \frac{1}{bb'}.$$

Fall 1: $n = \max(b, b') = b$.

Hier folgt aus (5.6): $0 < a'd - cb' < \frac{d}{b} = \frac{d}{n} \leq 1$, ein Widerspruch.

Fall 2: $n = \max(b, b') = b'$.

Hier folgt aus (5.5): $0 < cb - ad < \frac{d}{b'} = \frac{d}{n} \leq 1$, abermals ein Widerspruch.

Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ sind also in der Farey-Sequenz zum Index $\max(b, b')$ aufeinanderfolgend. Nun sei $n \geq \max(b, b')$ wieder allgemein. Solange nicht $b + b' \leq n$ ist, d.h. solange $n \leq b + b' - 1$ gilt, bleiben die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ in der n -ten Zeile benachbart, erst in der Zeile $b + b'$ wird zum ersten Mal ein neuer Bruch eingefügt, nämlich $\frac{a+a'}{b+b'}$, so dass $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$ in der Zeile $b + b'$ aufeinanderfolgen. Die nachfolgenden Zeilen liefern nur eingefügte Brüche zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ mit Nennern $\geq b + b'$, so dass (iii) folgt. \square

Bemerkung 5.3. Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ sind also genau in den Farey-Sequenzen zum Index n benachbart, für den gilt: $\max(b, b') \leq n \leq b + b' - 1$. Dies betrifft genau $\min(b, b')$ aufeinanderfolgende Farey-Sequenzen.

Satz 5.5. *Es seien $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ die beiden Brüche aus Satz 5.4 (i). Dann gilt für alle $n \geq \max(b, b')$:*

(i) *Die beiden Brüche*

$$\frac{a + a' \lfloor \frac{n-b}{b'} \rfloor}{b + b' \lfloor \frac{n-b}{b'} \rfloor} < \frac{a'}{b'}$$

sind gekürzt, und folgen in der n -ten Farey-Sequenz aufeinander.

(ii) *Die beiden Brüche*

$$\frac{a}{b} < \frac{a' + a \lfloor \frac{n-b'}{b} \rfloor}{b' + b \lfloor \frac{n-b'}{b} \rfloor}$$

sind gekürzt, und folgen in der n -ten Farey-Sequenz aufeinander.

Beweis. Folgt aus Satz 5.4 unter Beachtung von $b + b' \lfloor \frac{n-b}{b'} \rfloor + b' > n$ bzw. $b + b' + b \lfloor \frac{n-b'}{b} \rfloor > n$, wobei $b + b' \lfloor \frac{n-b}{b'} \rfloor \leq n$ bzw. $b' + b \lfloor \frac{n-b'}{b} \rfloor \leq n$ klar sind. \square

Satz 5.6. *Gegeben seien zwei teilerfremde ganze Zahlen a und b mit $0 \leq a < b$. Wir wenden den erweiterten euklidischen Algorithmus in Satz 2.2 auf $r_0 := b$, $r_1 := a$ an, und verwenden die dortigen Bezeichnungen, insbesondere ist $n_0 \geq 1$ der Abbruchindex aus Satz 2.2(i).*

Nun definieren wir ganze Zahlen a' und b' mit Hilfe der folgenden beiden Fallunterscheidungen: Falls n_0 ungerade ist, setzen wir $a' := s_{n_0-1}$, $b' := t_{n_0-1}$. Ist dagegen n_0 gerade, so sei $a' := a - s_{n_0-1}$, $b' := b - t_{n_0-1}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) *Es ist $0 < a' \leq b' \leq b$ und $a'b - ab' = 1$ für $a > 0$.*

(ii) *Die beiden gekürzten Brüche*

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$$

folgen in der b -ten Farey-Sequenz aufeinander, sofern $a > 0$ ist.

(iii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq b$ folgen die beiden gekürzten Brüche*

$$\frac{a}{b} < \frac{a' + a \lfloor \frac{n-b'}{b} \rfloor}{b' + b \lfloor \frac{n-b'}{b} \rfloor}$$

in der n -ten Farey-Sequenz aufeinander.

Beweis. Für ungerades n_0 sei $a = r_1 > 0$. Dann folgt aus Satz 2.2 (iii),(iv) unter Beachtung der Teilerfremdheit von a und b :

$$0 < s_{n_0-1} = a' \leq t_{n_0-1} = b' \leq t_{n_0} = b$$

sowie

$$1 = (a, b) = bs_{n_0-1} - at_{n_0-1} = a'b - ab',$$

so dass die Teilaussage (i) erfüllt ist. Nach Satz 5.4 gilt dann wegen $\max(b, b') = b$ auch die Teilaussage (ii). Nun sei $n_0 \geq 2$ gerade. Dann ist $b > 1$, da $b = 1$ nur für $a = r_1 = 0$ mit $n_0 = 1$ möglich ist. Hier folgt im Einklang mit (2.2) und (2.3) in Bemerkung 2.5, dass die beiden Brüche

$$\frac{s_{n_0-1}}{t_{n_0-1}} < \frac{a}{b}$$

in der b -ten Farey-Sequenz benachbart sind. Dabei ist $t_{n_0-1} < b$ wegen $b > 1$ und $(t_{n_0-1}, b) = 1$, so dass für b' und a' die Darstellungen

$$b' = b - t_{n_0-1} = b \left\lfloor \frac{b + t_{n_0-1}}{b} \right\rfloor - t_{n_0-1}, \quad a' = a - s_{n_0-1} = a \left\lfloor \frac{b + t_{n_0-1}}{b} \right\rfloor - s_{n_0-1}$$

gelten und a'/b' nach Satz 5.2 der *gekürzte rechte Nachbarbruch* zu a/b in der b -ten Farey-Sequenz ist. Damit sind (i) und (ii) bewiesen.

Schließlich folgt die Teilaussage (iii) des Satzes für $n \geq \max(b, b') = b$ sofort aus (i),(ii) und Satz 5.5(ii), da sie auch für $a = 0$, $b = 1$, $a' = 1$, $b' = 0$ gilt. \square

Nun verallgemeinern wir die Aufgabenstellung aus Abschnitt 3 wie folgt:

Gegeben seien für ganze Zahlen a, b, c, d mit $b, d \in \mathbb{N}$ zwei Brüche mit $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. Hierbei nehmen wir an, die beiden Brüche seien gekürzt. Das ist keine wesentliche Einschränkung, da man immer mit dem euklidischen Algorithmus aus Satz 2.2 als Nebenprodukt die gekürzte Form von a/b bzw. c/d erhält.

Aufgabe: Man konstruiere für eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl $n \geq \max(b, d)$ denjenigen Teilabschnitt der n -ten Farey-Folge, der genau aus den gekürzten Brüchen s/t mit $a/b \leq s/t \leq c/d$ besteht.

Lösung: Wir konstruieren mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus zuerst gemäß Satz 5.6 zu a/b den rechten Nachbarbruch in der n -ten Farey-Sequenz. Nun haben wir zwei aufeinanderfolgende Brüche am Anfang des gesuchten Teilabschnitts der n -ten Farey-Sequenz. Solange der Endbruch c/d noch nicht erreicht ist, wenden wir schrittweise den Satz 5.2 an, indem wir aus den letzten beiden bereits konstruierten Brüchen des Abschnitts den nachfolgenden rechten Nachbarbruch berechnen. Das Verfahren endet mit der Konstruktion des Bruches c/d .

Hierbei müssen weder die Farey-Sequenzen mit einem Index kleiner als n ermittelt werden, noch muss mit dem Startbruch $0/1$ der n -ten Farey-Sequenz begonnen werden.

Im Anhang dieser Arbeit findet der Leser Rechenbeispiele, die von einem Programm in Free Pascal erzeugt worden sind.

Schlusswort und Danksagung:

Dieses Skript ist aus einem Intensivkurs Mathematik für Schüler der Klassenstufe 9 an der Otto-von-Guericke-Universität-Magdeburg im September 2011 hervorgegangen, bei dem ich zusammen mit vielen anderen Kollegen mit meinem eigenen Wunschthema zu Farey-Sequenzen beitragen durfte.

Dieses Thema scheint mir zur Förderung interessierter Schüler besonders geeignet, da hier mit geringen Grundkenntnissen schon interessante Lehrsätze der elementaren Zahlentheorie gewonnen werden können.

Ich möchte mich an dieser Stelle besonders bei Herrn Thomas Stöter bedanken, der mein Skript in ein sehr gutes Latex-File verwandelt hat, aktiv am Korrekturlesen beteiligt war und darüber hinaus das Pascal-Programm im Anhang dieser Arbeit entwickelt hat.

6. ANHANG: PASCAL-PROGRAMM UND RECHENBEISPIELE

Pascal-Programm.

```
{
  Programm in Free Pascal (FPC) zum Skriptum "Farey-Sequenzen":
  Berechnung der Farey-Brueche der n-ten Ordnung
  zwischen zwei Randbruechen a/b und c/d

  von Thomas Stoeter
}

program farey;

type ggt_tab = array[1..4] of integer;

function erw_euk_alg (a: integer; b: integer) : ggt_tab;
{
  Erweiterter euklidischer Algorithmus in Satz 2.2:
}
var
  q          : integer;
  r, ralt, rneu : integer;
  s, salt, sneu : integer;
  t, talt, tneu : integer;

begin
  salt := 1; talt := 0;
  sneu := 0; tneu := 1;
  ralt := b; rneu := a;

  while (rneu > 0) do
  begin
    q := ralt div rneu;
    r := ralt - q * rneu;
    s := salt + q * sneu;
    t := talt + q * tneu;

    ralt := rneu; rneu := r;
    salt := sneu; sneu := s;
    talt := tneu; tneu := t;
  end;

  erw_euk_alg[1] := salt;
  erw_euk_alg[2] := talt;
  erw_euk_alg[3] := sneu;
  erw_euk_alg[4] := tneu;
end;
```

```

const
    obergrenze = 10000; {groesser als maximale Anzahl der Brueche}
    maxausgabe = 500;   {maximale Anzahl auszugebener Brueche}

var

    n                : integer; {Maximalnenner}
    a, b, c, d       : integer; {Randbrueche}
    astrich, bstrich : integer; {Hilfsbruch}
    lae              : integer; {Zaehlvariable fuer Brueche}
    j,ganz           : integer; {Zaehl- und Hilfsvariable}
    swert,twert      : integer; {Ausgabevariablen zu erw_euk_alg}
    ggt_table        : ggt_tab; {Ausgabevektor zu erw_euk_alg}
    teilz, teiln     : array[1..obergrenze] of integer;
                    {Zaehler- und Nenner Arrays fuer
                     die Brueche zwischen a/b und c/d}

begin {Hauptprogramm}
    writeln;
    writeln('Berechnung von Farey-Bruechen von a/b bis c/d');
    write('Gib den Maximalnenner n an: ');
    readln(n);
    if (n<1) then begin writeln('n < 1 ist verboten!'); halt; end;
    write('Gib a an: ');
    readln(a);
    write('Gib b an: ');
    readln(b);
    write('Gib c an: ');
    readln(c);
    write('Gib d an: ');
    readln(d);
    writeln;

    if (a<0) then begin writeln('a < 0 ist verboten!'); halt; end;
    if (b<1) then begin writeln('b < 1 ist verboten!'); halt; end;
    if (d<1) then begin writeln('d < 1 ist verboten!'); halt; end;
    if (a>=b) then begin writeln('a >= b ist verboten!'); halt; end;
    if (c>d) then begin writeln('c > d ist verboten!'); halt; end;
    if (c*b-a*d < 1) then
    begin
        writeln('a/b >= c/d ist verboten!');
        halt;
    end;

{
    Kuerzen der Randbrueche a/b und c/d mit dem
    erweiterten euklidischen Algorithmus:
}

    ggt_table := erw_euk_alg(a,b);
    swert := ggt_table[1];

```



```

twert := ggt_table[2];
a := ggt_table[3];
b := ggt_table[4];

ggt_table := erw_euk_alg(c,d);
c := ggt_table[3];
d := ggt_table[4];

if (b>n) then begin writeln('b ist zu gross!'); halt; end;
if (d>n) then begin writeln('d ist zu gross!'); halt; end;

teilm[1] := a;
teilm[1] := b;

{
  Berechnung des rechten Nachbarbruches von a/b in der
  n-ten Farey-Sequenz gemaess Satz 5.6 (iii):
}

astrich := swert;
bstrich := twert;

if (a*twert - b*swert > 0) then
begin
  astrich := a-swert;
  bstrich := b-twert;
end;

teilm[2] := astrich + a*((n-bstrich) div b);
teilm[2] := bstrich + b*((n-bstrich) div b);
lae := 2;

{
  solange c/d noch nicht erreicht ist, wird Satz 5.2 angewendet:
}

while (teilm[lae]*d - teilm[lae]*c < 0) do
{rechter Randbruch c/d noch nicht erreicht :}
begin {Rekursionsformel aus Satz 5.2 }
  if lae < obergrenze then
  begin
    lae := lae + 1;
    ganz := (n+teilm[lae-2]) div teilm[lae-1];
    teilm[lae] := teilm[lae-1] * ganz - teilm[lae-2];
    teilm[lae] := teilm[lae-1] * ganz - teilm[lae-2];
  end

  else
  begin
    break;
  end;
end;
end;

```

```

{
  Ausgabe der Zwischenbrueche fuer lae <= maxausgabe:
}

if (lae <= maxausgabe) then
begin
  for j := 1 to lae do
  begin
    write(j);
    write('-ter Bruch : ');
    write(teilz[j]);
    write('/');
    write(teiln[j]);
    writeln;

    end;
    writeln;
end;

if (lae < obergrenze) then
begin
  write('Farey-Index n = ');
  write(n);
  writeln;
  write('Anzahl der Brueche = ');
  write(lae);
  writeln;
  write('gekuerzter linker Randbruch = ');
  write(teilz[1]);
  write('/');
  write(teiln[1]);
  writeln;
  write('gekuerzter rechter Randbruch = ');
  write(teilz[lae]);
  write('/');
  write(teiln[lae]);
  writeln;
end

else
begin
  writeln('Anzahl der zu berechnenden Brueche ist zu gross:');
  writeln('Entweder die Konstante obergrenze vergroessern,');
  writeln('oder die Randbrueche a/b und c/d enger beieinander waehlen!');
end;
writeln('*****');
writeln;
end.

```

Rechenbeispiele.

Berechnung von Farey-Bruechen von a/b bis c/d

Gib den Maximalnenner n an: 9

Gib a an: 0

Gib b an: 1

Gib c an: 1

Gib d an: 1

1-ter Bruch : 0/1
 2-ter Bruch : 1/9
 3-ter Bruch : 1/8
 4-ter Bruch : 1/7
 5-ter Bruch : 1/6
 6-ter Bruch : 1/5
 7-ter Bruch : 2/9
 8-ter Bruch : 1/4
 9-ter Bruch : 2/7
 10-ter Bruch : 1/3
 11-ter Bruch : 3/8
 12-ter Bruch : 2/5
 13-ter Bruch : 3/7
 14-ter Bruch : 4/9
 15-ter Bruch : 1/2
 16-ter Bruch : 5/9
 17-ter Bruch : 4/7
 18-ter Bruch : 3/5
 19-ter Bruch : 5/8
 20-ter Bruch : 2/3
 21-ter Bruch : 5/7
 22-ter Bruch : 3/4
 23-ter Bruch : 7/9
 24-ter Bruch : 4/5
 25-ter Bruch : 5/6
 26-ter Bruch : 6/7
 27-ter Bruch : 7/8
 28-ter Bruch : 8/9
 29-ter Bruch : 1/1

Farey-Index $n = 9$

Anzahl der Brueche = 29

gekuerzter linker Randbruch = 0/1

gekuerzter rechter Randbruch = 1/1

Berechnung von Farey-Bruechen von a/b bis c/d

Gib den Maximalnenner n an: 24

Gib a an: 1

Gib b an: 3

Gib c an: 1

Gib d an: 2

1-ter Bruch : $1/3$
 2-ter Bruch : $8/23$
 3-ter Bruch : $7/20$
 4-ter Bruch : $6/17$
 5-ter Bruch : $5/14$
 6-ter Bruch : $4/11$
 7-ter Bruch : $7/19$
 8-ter Bruch : $3/8$
 9-ter Bruch : $8/21$
 10-ter Bruch : $5/13$
 11-ter Bruch : $7/18$
 12-ter Bruch : $9/23$
 13-ter Bruch : $2/5$
 14-ter Bruch : $9/22$
 15-ter Bruch : $7/17$
 16-ter Bruch : $5/12$
 17-ter Bruch : $8/19$
 18-ter Bruch : $3/7$
 19-ter Bruch : $10/23$
 20-ter Bruch : $7/16$
 21-ter Bruch : $4/9$
 22-ter Bruch : $9/20$
 23-ter Bruch : $5/11$
 24-ter Bruch : $11/24$
 25-ter Bruch : $6/13$
 26-ter Bruch : $7/15$
 27-ter Bruch : $8/17$
 28-ter Bruch : $9/19$
 29-ter Bruch : $10/21$
 30-ter Bruch : $11/23$
 31-ter Bruch : $1/2$

Farey-Index $n = 24$

Anzahl der Brueche = 31

gekuerzter linker Randbruch = $1/3$

gekuerzter rechter Randbruch = $1/2$

Berechnung von Farey-Bruechen von a/b bis c/d

Gib den Maximalnenner n an: 100

Gib a an: 1

Gib b an: 3

Gib c an: 1

Gib d an: 2

Farey-Index n = 100

Anzahl der Brueche = 507

gekuerzter linker Randbruch = 1/3

gekuerzter rechter Randbruch = 1/2

Berechnung von Farey-Bruechen von a/b bis c/d

Gib den Maximalnenner n an: 100

Gib a an: 2

Gib b an: 6

Gib c an: 3

Gib d an: 6

Farey-Index n = 100

Anzahl der Brueche = 507

gekuerzter linker Randbruch = 1/3

gekuerzter rechter Randbruch = 1/2

Berechnung von Farey-Bruechen von a/b bis c/d

Gib den Maximalnenner n an: 1000

Gib a an: 0

Gib b an: 1

Gib c an: 1

Gib d an: 1

Anzahl der zu berechnenden Brueche ist zu gross:

Entweder die Konstante obergrenze vergroessern,

oder die Randbrueche a/b und c/d enger beieinander waehlen!

UNIVERSITÄT MAGDEBURG, IAN, GEBÄUDE 02, UNIVERSITÄTSPLATZ 2, D-39106 MAGDEBURG, GERMANY

E-mail address: matthias.kunik@ovgu.de