# Analysis II

Vorlesungsskriptum

von

L. Tobiska

Institut für Analysis und Numerik

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Sommersemester 2003

# Inhaltsverzeichnis

# 10 Integration

Typische Fragestellungen bei der Integration sind:

- Präzise Definition des Flächeninhaltes
- Arbeit bei der Bewegung eines Massenpunktes im nichthomogenen Kraftfeld
- Bestimmung des Bewegungsablaufes, wenn die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit bekannt ist
- Mittelwert einer zeitlich veränderlichen Stromstärke

In bestimmten Sonderfällen ist die Antwort einfach, z.B. wenn

- das zu berechnende Flächenstück aus Rechtecken zusammengesetzt ist,
- die wirkende Kraft abschnittsweise konstant ist oder
- die Stromstärke sich nur von Zeit zu Zeit ändert

Das mathematisch Gemeinsame ist eine Abbildung, die sogenannten Treppenfunktionen eine Zahl (das Integral) zuordnet, so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind. Dabei ist es wünschenswert, diese Abbildung auf eine breitere Klasse von Funktionen auszudehnen, etwa auf die Klasse der stückweise stetigen Funktionen.

## 10.1 Treppen- und Regelfunktionen

**DEFINITION 10.1** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *und* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *eine Zerlegung des Intervalls* $[a,b]$*, so dass die Einschränkung von* $f$ *auf* $(x_{i-1}, x_i)$*,* $i = 1, \ldots, n$ *konstant ist. Dann heißt* $f$ *Treppenfunktion.*

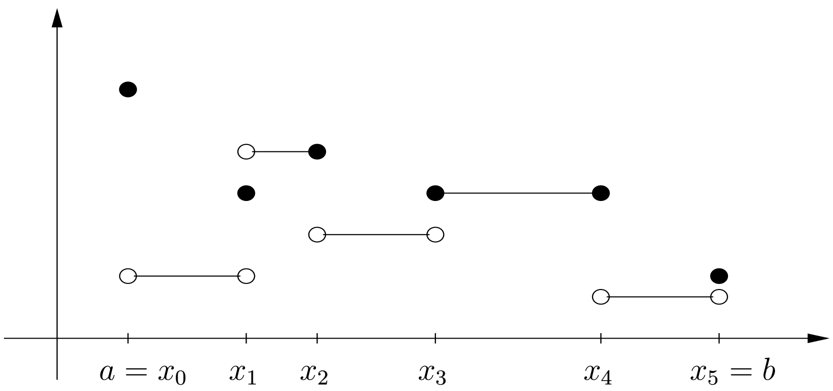



Abbildung 1: Beispiel einer Treppenfunktion

**Beachte:**

1. Der Wertebereich einer Treppenfunktion ist eine endliche Menge.
2. Die Definition von $f$ in den Teilpunkten der Zerlegung ist beliebig; genauer ist $f$ auf $[a, b]$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ die Zerlegung mit möglichst großen Konstanzintervallen, so nimmt $f$ maximal $2n + 1$-verschiedene Funktionswerte an.

**THEOREM 10.1** *Die Menge aller Treppenfunktionen bildet im Raum $\mathcal{B}([a, b])$ der auf $[a, b]$ beschränkten Funktionen einen linearen Unterraum.*

**Beweis.** Sind $f$ Treppenfunktion auf $[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $(\lambda f)$ mit $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ Treppenfuntion auf $[a, b]$. Die Summe $f + g$ zweier Treppenfunktionen $f$ und $g$ auf $[a, b]$ ist gleichfalls Treppenfunktion auf $[a, b]$. Als Teilpunkte der Zerlegung von $f + g$ wählen wir alle Punkte, die Teilpunkte der Zerlegungen von $f$ bzw. von $g$ sind. ♣

Welche Funktionen lassen sich in $\mathcal{B}([a, b])$ als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen beschreiben? Äquivalent ausgedrückt: Welche Funktionen sind Grenzwerte einer gleichmäßig konvergenten Folge von Treppenfunktionen? Wir geben zunächst eine Teilantwort, indem wir zeigen, dass die stetigen Funktionen zu der in $\mathcal{B}([a, b])$ gesuchten Klasse gehören.

**THEOREM 10.2** *Zu jeder stetigen Funktion $f[a, b] :\rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.*

**Beweis.** Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in $n$ gleich große Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i)$ mit

$$x_i := a + \frac{b-a}{n}\, i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

und definieren $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_n(x) := \begin{cases} f(z_i) & \text{für} \quad x_{i-1} \le x < x_i, \quad z_i \in [x_{i-1}, x_i) \text{ beliebig} \\ f(b) & \text{für} \quad x = b. \end{cases}$$

Da $f$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Die Länge der Teilintervalle $(b-a)/n$ ist für $n > n_0(\varepsilon) := (b-a)/\delta(\varepsilon)$ kleiner als $\delta(\varepsilon)$, somit ist nach Konstruktion von $g_n$

$$\forall n > n_0(\varepsilon),\ \forall x \in [a, b] : \quad |g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oder

$$\|g_n - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |(g_n - f)(x)| \le \varepsilon,$$

d.h. $g_n$ approximiert $f$ in der vorgegebenen Toleranz $\varepsilon$. ♣

**DEFINITION 10.2** *Jede Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, zu der eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen existiert, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, heißt Regelfunktion.*

**FOLGERUNG 10.1** *Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist Regelfunktion. Jede Treppenfunktion ist Regelfunktion.*

Wie kann die Gesamtheit aller Regelfunktionen charakterisiert werden?

**THEOREM 10.3** *Regelfunktionen sind genau diejenigen Funktionen, die in jedem inneren Punkt des Intervalls $[a,b]$ einen rechts- und linksseitigen Grenzwert, sowie in den Randpunkten des Intervalls einen einseitigen Grenzwert besitzen.*

**Beweis.** (A) o.B.d.A. zeigen wir für $x_0 \in [a,b)$:

$$f \text{ Regelfunktion} \Rightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ existiert}$$

Wir verwenden das Cauchy Kriterium und betrachten $x, y > x_0$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - f(y)| \\ &\le 2\|f - g_n\| + |g_n(x) - g_n(y)|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - g_n\| < \varepsilon$. Für die zugeordnete Treppenfunktion $g_n$ ist $x_0$ entweder auf einem Konstanzintervall oder auf dem Rand. In beiden Fällen haben wir für genügend kleines $\delta = \delta(n(\varepsilon))$

$$|g_n(x) - g_n(y)| = 0 \quad \text{für } |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta.$$

Zusammengefaßt ergibt dies

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta.$$

(B) $\forall x_0 \,\exists \lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) \quad \Rightarrow \quad f$ Regelfunktion.
Nach dem Cauchy Kriterium gilt $\forall x_0 \in [a,b] \;\exists B(x_0,\delta)$ mit

$$x, y \in B(x_0,\delta), \quad x, y < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

und

$$x, y \in B(x_0,\delta), \quad x, y > x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Die Menge aller $B(x_0,\delta)$ überdecken $[a,b]$. Da $[a,b]$ kompakt ist, genügen endlich viele dieser Umgebungen zur Überdeckung von $[a,b]$ aus. Diese seien mit $B(x_i,\delta_i)$,

$i = 1, \ldots, n$ bezeichnet. Wir ordnen die Punkte $x_i$, die in $[a, b]$ liegenden Endpunkte $x_i \pm \delta_i$ der offenen Intervalle und $a$, $b$ der Größe nach und erhalten so die Zerlegung

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = b.$$

In jedem Teilintervall wählen wir $\xi_j \in (y_j, y_{j+1})$ und definieren eine Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} f(\xi_j) & x \in (y_j, y_{j+1}) \\ f(y_j) & x = y_j \end{cases}$$

Dann gilt

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Damit haben wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion konstruiert, die $f$ in der Norm von $\mathcal{B}([a, b])$ mit der Toleranz $\varepsilon$ approximiert. ♣

Im folgenden benutzen wir im Fall der Existenz der Grenzwerte die Bezeichnungen

$$f(x_+) = \lim_{t \to x+0} f(t) \quad \text{und} \quad f(x_-) = \lim_{t \to x-0} f(t).$$

Insbesondere existieren für eine Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte $f(a_+)$, $f(b_-)$ und $f(x_+)$ sowie $f(x_-)$ für jedes $x \in (a, b)$.

## 10.2 Integration von Treppenfunktionen

**DEFINITION 10.3** *Seien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit*

$$g(x) = c_k \quad \forall x \in (x_{k-1}, x_k).$$

*Dann heißt*

$$I(g) := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

*Integral der Treppenfunktion $g$, in Zeichen*

$$I(g) = \int_a^b g(x)\, dx.$$

**BEMERKUNG 10.1** *Wesentlich ist, dass die Definition von $I(g)$ unabhängig von der konkreten Zerlegung ist. Dies sieht man daran, dass*

*(i) die Hinzunahme weiterer Teilpunkte den Wert $I(g)$ nicht ändert,*

*(ii) eine minimale Anzahl von Teilpunkten existiert, so dass $g$ auf den Teilintervallen konstant ist.*

**Eigenschaften der Abbildung** $g \to I(g)$

1. $I$ ist auf der Menge aller Treppenfunktionen eine Linearform, d.h.

$$\begin{aligned} I(g_1 + g_2) &= I(g_1) + I(g_2) \quad \forall g_1, g_2, \\ I(\lambda g) &= \lambda I(g) \quad \forall g, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Die Linearform ist positiv, d.h.

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad I(g) \geq 0.$$

3. Die Linearform ist monoton, d.h.

$$g_2(x) \geq g_1(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad I(g_2) \geq I(g_1).$$

4. Die Linearform $I$ ist beschränkt, d.h. für jede Treppenfunktion $g$ gilt

$$|I(g)| \leq (b - a)\|g\|, \quad \|g\| := \max_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

Neben der Additivität bezüglich des Integranden hat das Integral auch eine Additivitätseigenschaft bezüglich des Integrationsintervalls.

**THEOREM 10.4** *Für jedes $c \in [a, b]$ gilt:*

$$\int_a^c g(x)\, dx + \int_c^b g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

**Beweis.** Da die Einschränkung einer Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf ein beliebiges Teilintervall wieder eine Treppenfunktion ist, folgt die Aussage durch Aufnahme des Punktes $c$ in die Zerlegung. ♣

## 10.3 Integration von Regelfunktionen

Wir wollen die Integraldefinition auf die Klasse der Regelfunktionen ausdehnen und nutzen hierzu die Eigenschaften:

(i) Beschränktheit der Linearform

(ii) Approximierbarkeit von Regelfunktionen durch Treppenfunktionen.

Sei $f$ eine Regelfunktion. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|f - g_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Wir zeigen, dass die Zahlenfolge $(I(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Es gilt

$$|I(g_n) - I(g_m)| = |I(g_n - g_m)| \leq (b-a)\|g_n - g_m\|.$$

Nun ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge in $\mathcal{B}([a,b])$ Cauchyfolge und mit obiger Abschätzung die Folge $(I(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Damit existiert der Grenzwert der Zahlenfolge $(I(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und wir setzen:

$$I(f) := \lim_{n\to\infty} I(g_n).$$

Diese Definition des Integrals einer Regelfunktion macht nur Sinn, wenn wir die Unabhängigkeit des Wertes $I(f)$ von der Wahl der $f$ approximierenden Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigen können. Seien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei $f$ approximierende Folgen in $\mathcal{B}([a,b])$. Wegen

$$\begin{aligned} |I(g_n) - I(h_n)| &= |I(g_n - h_n)| \leq (b-a)\|g_n - h_n\| \\ &\leq (b-a)\left(\|g_n - f\| + \|f - h_n\|\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

konvergieren die Folgen $(I(g_n))_{n\geq 1}$ und $(I(h_n))_{n\geq 1}$ gegen den gleichen Grenzwert.

**Eigenschaften der erweiterten Linearform $f \to I(f)$**

Für Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und Regelfunktionen $f_1$, $f_2$, $f$ gilt

$$\begin{aligned} I(f_1 + f_2) &= I(f_1) + I(f_2) \\ I(\lambda f) &= \lambda I(f) \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] &\Rightarrow \quad I(f) \geq 0 \\ |I(f)| &\leq (b-a)\|f\| \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ist oftmals zu grob. Etwas genauer ist die folgende Eigenschaft, die sich aus der Monotonie der Linearform ergibt:

$$\begin{aligned} & \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \quad f(x) \quad \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) \\ \Longrightarrow \quad & (b-a)\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x). \end{aligned}$$

Ist $f$ zusätzlich stetig, so folgt der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

**THEOREM 10.5** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

**Beweis.** Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen wird der zwischen $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ liegende Wert $1/(b-a)\int_a^b f(x)\, dx$ mindestens einmal als Funktionswert $f(\xi)$ angenommen. ♣

Die Additivität des Integrals bezüglich des Integrationsintervalls läßt sich ebenfalls auf Regelfunktionen übertragen.

**THEOREM 10.6** *Sind $f$ Regelfunktion auf $[a,b]$ und $c \in [a,b]$, so gilt*

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

**Beweis.** Die Einschränkung einer Regelfunktion ist wieder eine Regelfunktion (vgl. Theorem 10.3). Ist $(g_n)$ eine Folge von Treppenfunktionen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, so konvergieren auch die Einschränkungen von $g_n$ auf $[a,c]$ und $[c,b]$ auf den Teilintervallen gleichmäßig gegen die Einschränkungen von $f$. Die Behauptung folgt nun aus der Additivität für Treppenfunktionen, nämlich

$$\int_a^c g_n(x)\, dx + \int_c^b g_n(x)\, dx = \int_a^b g_n(x)\, dx$$

und Grenzübergang $n \to \infty$. ♣.

Dieser Satz ermöglich uns, auf die Voraussetzung $a < b$ zu verzichten und für $a \geq b$ zu definieren:

$$\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx$$

Mit dieser erweiterten Definition ist die Gleichung

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

für beliebige Anordnung von $a$, $b$, $c$ aus dem Definitionsbereich von $f$ gültig. Insbesondere gilt

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

## 10.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das Umkehrproblem der Differentialrechnung,

finde zu gegebenen $f$ eine Funktion $F$ mit $F'(x) = f(x)$, kann für stetige Funktionen $f$ mit Hilfe der Integralrechnung gelöst werden. Hieraus ergibt sich zugleich eine wirksame Methode zur Berechnung von Integralen.

**THEOREM 10.7** *Ist $f$ eine Regelfunktion auf $[a,b]$, so ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

*auf $[a,b]$ stetig.*

**Beweis.** Da $f$ auf $[a,x]$ für jedes $x \in [a,b]$ Regelfunktion ist, ist $F$ zunächst auf $[a,b]$ definiert. Seien nun $x_1, x_2 \in [a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \\ |F(x_2) - F(x_1)| &\leq |x_2 - x_1|\,\|f\|, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar die Stetigkeit von $F$ folgt. ♣

**THEOREM 10.8** *Ist $f$ auf $[a,b]$ Regelfunktion, so ist*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*einseitig differenzierbar und für die rechts- bzw. linksseitige Abbildung gilt*

$$F'_+(x) = f(x_+), \qquad F'_-(x) = f(x_-).$$

**Beweis.** Wir führen den Beweis o.B.d.A. für die rechtsseitige Ableitung. Sei $h > 0$. Dann gilt

$$F(x+h) - F(x) - f(x_+)h = \int_x^{x+h} (f(t) - f(x_+))\,dt$$

und $F$ ist rechtsseitig differenzierbar mit der rechtsseitigen Ableitung $f(x_+)$ falls die durch

$$r(x+h)h = \int_x^{x+h} (f(t) - f(x_+))\,dt$$

definierte Abbildung $r$ in $x$ rechtsseitig stetig mit $r(x_+) = 0$ ist. Da

$$\lim_{t \to x+0} f(t) = f(x_+),$$

gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$, so dass für alle $t$ mit $x < t < x + \delta(\varepsilon)$

$$|f(t) - f(x_+)| < \varepsilon.$$

Also haben wir für $0 < h < \delta(\varepsilon)$

$$|r(x+h)h| < \varepsilon(x+h-x) = \varepsilon h,$$

d.h. $\lim_{h\to+0} r(x+h) = 0$. ♣

**THEOREM 10.9** *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*
*Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

*auf $[a,b]$ stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$. $F$ ist also eine Stammfunktion von $f$ auf $[a,b]$.*

**Beweis.** Aus $f$ stetig folgt $f(x_+) = f(x_-) = f(x)$ und somit $F'_+(x) = F'_-(x) = F'(x) = f(x)$. ♣

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich sofort eine Berechnungsformel für Integrale.

**THEOREM 10.10** *Ist $F$ irgendeine Stammfunktion der auf $[a,b]$ stetigen Funktion $f$, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

**Beweis.** Bekanntlich kann jede Stammfunktion in der Form $\Phi + const$ mit einer festen Stammfunktion $\Phi$ dargestellt werden, also

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + const.$$

Setzt man $x = a$, ergibt sich die Konstante zu $const = F(a)$. Die Behauptung folgt nun für $x = b$. ♣

## 10.5 Integrationsregeln

**THEOREM 10.11** *(Substitutionsregel)*
*Seien $f$ stetig, $g$ stetig differenzierbar und die Verkettung $f \circ g$ möglich. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

**Beweisskizze:** Ist $F$ Stammfunktion von $f$, so folgt aus der Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\, g'(t) = ((f \circ g)\, g')(t),$$

dass $(F \circ g)$ Stammfunktion von $(f \circ g)\, g'$ ist. ♣

**BEISPIEL 10.1**

$$\int_0^{\pi/4} e^{\sin t} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} e^x\, dx = e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - 1$$

**THEOREM 10.12** *(Partielle Integration)*
*Seien $f$ stetig, $F$ eine Stammfunktion von $f$ und $g$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx$$

**Beweisskizze:** Nach der Produktregel

$$(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$$

ist $Fg$ Stammfunktion von $fg + Fg'$. ♣

**BEISPIEL 10.2**

$$\int_1^e x\, \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$$

**THEOREM 10.13** *(Partialbruchzerlegung)*
*Sind $f$ und $g$ Polynome vom Grade $n$ bzw. $m$ und $n < m$, so eistiert eine eindeutig bestimmte Zerlegung*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^{r} \left[ \frac{c_{j,k_j}}{(x-a_j)^{k_j}} + \frac{c_{j,k_j-1}}{(x-a_j)^{k_j-1}} + \cdots + \frac{c_{j,1}}{x-a_j} \right],$$

*wobei $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, r$ die Nullstellen des Nennerpolynoms $g$ und $k_j \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der Nullstelle $a_j$ bezeichnen.*

**BEMERKUNG 10.2** *Zu gebrochen rationalen Funktionen kann eine Stammfunktion in elementarer Form berechnet werden, falls es Stammfunktionen zu*

$$\frac{1}{(x-a)^n}, \quad a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

*gibt.*

Wir betrachten verschiedene Fälle.
**Fall $n > 1$**

$$\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} \quad \text{ist Stammfunktion zu} \quad \frac{1}{(x-a)^n}.$$

**Fall $n = 1$, $a \in \mathbb{R}$**

$$\ln|x-a| \quad \text{ist Stammfunktion zu} \quad \frac{1}{x-a}.$$

**Fall $n = 1$, $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$**
O.B.d.A. sei $a = i$. Zu

$$\frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

ist dann

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + i\arctan x$$

Stammfunktion.

**BEISPIEL 10.3** *Zur Bestimmung des Integrals*

$$\int_2^3 \frac{2x^3-6x^2+9x+4}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}\,dx$$

*führen wir zunächst eine Zerlegung in Partialbrüche durch. Eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist $x = 1$, denn*

$$(x^4-x^3-3x^2+5x-2) : (x-1) = x^3-3x+2.$$

*Das Polynom $x^3 - 3x + 2$ hat ebenfalls die Nullstelle $x = 1$, es gilt*

$$(x^3-3x+2) : (x-1) = x^2+x-2.$$

*Die Nullstellen des verbleibenden Polynom 2. Grades können direkt bestimmt werden. Sie sind $x = 1$ und $x = -2$. In Übereinstimmung mit Theorem 10.13 setzen wir mit unbestimmten Koeffizienten $A$, $B$, $C$, $D$*

$$\frac{2x^3-6x^2+9x+4}{x^4-x^3-3x^2+5x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

*an. Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt*

$$A(x-1)^3 + B(x+2) + C(x+2)(x-1) + D(x+2)(x-1)^2 = 2x^3-6x^2+9x+4.$$

*Wir setzen $x = 1$ und erhalten $3B = 9$, bzw. $B = 3$. Andererseits ergibt $x = -2$ die Beziehung $-27A = -54$, also ist $A = 2$. Zur Bestimmung von $C$ und $D$ wählen wir $x = 0$ und $x = -1$. Dies liefert das Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rcrcl} -2C & + & 2D & = & 0, \\ -2C & - & 9D & = & 0, \end{array}$$

*dessen Lösung $C = D = 0$ ist. Somit haben wir*

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{2x^3 - 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}\, dx &= \int_2^3 \frac{2dx}{x+2} + \int_2^3 \frac{3dx}{(x-1)^3} \\ &= 2\ln|x+2|\Big|_2^3 - \frac{3}{2}(x-1)^{-2}\Big|_2^3 \\ \int_2^3 \frac{2x^3 - 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}\, dx &= 2\ln\frac{5}{4} + \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

## 10.6 Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang

Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Regelfunktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf $[a, b]$ punktweise gegen die Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wir untersuchen die Frage, ob die Folge

$$\left( \int_a^b f_n(x)\, dx \right)_{n\geq 1}$$

konvergiert und ob dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

gilt. Eine einfache Antwort ergibt sich im Fall der gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\geq 1}$.

**THEOREM 10.14** *Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Regelfunktionen sei gleichmäßig konvergent gegen $f$. Dann ist die Folge der Integrale $(I(f_n))_{n\geq 1}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(\lim_{n\to\infty} f_n).$$

**Beweis.** Aus den Voraussetzungen folgt zunächst, dass $f$ Regelfunktion ist. Da $I$ eine beschränkte Linearform auf dem Raum der Regelfunktionen ist, gilt

$$|I(f) - I(f_n)| = |I(f - f_n)| \leq (b - a)\|f - f_n\|,$$

woraus die Behauptung folgt. ♣.

**BEMERKUNG 10.3** *Für gleichmäßig konvergente Funktionenreihen lautet der Satz wie folgt: Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *auf* $[a,b]$ *gleichmäßig konvergent und* $f_n$, $n \geq 1$, *Regelfunktionen. Dann sind Summation und Integration vertauschbar, genauer gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx.$$

**BEISPIEL 10.4** *Für* $|q| < 1$ *gilt*

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

*und die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von* $(-1,+1)$, *also auf* $[-1+\sigma, 1-\sigma]$ *für* $\sigma > 0$ *beliebig, aber fest. Setzt man* $q = -t^2$, *so folgt nach Integration über* $[0,x]$ *mit* $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}. \end{aligned}$$

Liegt nur punktweise Konvergenz vor, so lassen sich im allgemeinen Grenzübergang und Integration nicht vertauschen, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 10.5** *Betrachte* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x = 0 \\ c_n & \textit{für} \quad 0 < x < 1/n \\ 0 & \textit{für} \quad 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

*Eigenschaften der Folge:*

- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *punktweise auf* $[0,1]$.
- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *gleichmäßig auf* $[0,1]$, *falls*

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0.$$

- $I(f_n) = c_n/n$, $I(f) = 0$.

Man kann an diesem Beispiel folgendes ablesen:

1. Ist die Folge $(|c_n|)_{n\geq 1}$ beschränkt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = 0 = I(\lim_{n\to\infty} f_n),$$

   Grenzübergang und Integration sind in diesem Fall vertauschbar.

2. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} I(f_n)$ kann existieren, ohne dass

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(\lim_{n\to\infty} f_n)$$

   gilt. Wähle etwa $c_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Grenzübergang und Integration sind in diesem Fall nicht vertauschbar.

3. Auch bei punktweiser Konvergenz von $(f_n)$ gegen $f$ kann $\lim_{n\to\infty} I(f_n)$ divergieren. Wähle etwa $c_n = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Grenzübergang und Integration sind in diesem Fall nicht vertauschbar.

**THEOREM 10.15** *(Arzela–Osgood)*
*Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine punktweise konvergente Folge von Regelfunktionen. Die Grenzfunktion $f$ sei Regelfunktion und die Zahlenfolge $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(\lim_{n\to\infty} f_n).$$

**Beweis.** Da $f$ eine Regelfunktion ist, ist der Satz bewiesen, wenn für die punktweise gegen 0 konvergierende Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ mit $g_n = f_n - f$ aus der Beschränktheit

$$\|g_n\| = \|f_n - f\| \leq \|f_n\| + \|f\| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} I(g_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n - f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) - I(f)$$

verschwindet. Dies ist Gegenstand des folgenden Lemma. ♣

**LEMMA 10.1** *Sei $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Regelfunktionen mit den Eigenschaften*

*(i)* $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ *für alle* $x \in [a, b]$

*(ii)* $\|g_n\| \leq C$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

*Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} I(g_n) = 0$.

Es genügt, das Lemma für den Fall von Treppenfunktionen zu beweisen. Wir zeigen, dass das Lemma dann auch für Regelfunktionen gilt. Zu jeder Regelfunktion $f_n$ existiert eine Treppenfunktion $g_n$, für die

$$\|f_n - g_n\| < \frac{1}{n}$$

gilt. Die Folge von Treppenfunktionen $(g_n)$ genügt (i) und (ii). Aus der Integralabschätzung

$$|I(f_n) - I(g_n)| \leq (b-a)\|f_n - g_n\| \leq \frac{b-a}{n}$$

folgt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(g_n) = 0.$$

Der Beweis des Lemma für den Fall von Treppenfunktionen basiert auf zwei Hilfsaussagen.

**Aussage 1** Sei $g$ eine Treppenfunktion, für die gilt

$$\left|\int_a^b g(x)\ dx\right| \geq \varepsilon.$$

Dann ist die Menge

$$S := \left\{x \middle| \ |g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right\}$$

Vereinigung von unendlich vielen disjunkten Intervallen, für deren Gesamtlänge $\lambda(S)$ die Abschätzung

$$\lambda(S) \geq \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|g\|}$$

gilt.

Sei $g$ eine Treppenfunktion, die auf $J_k$ den Wert $c_k$ annimmt. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)\ dx = \sum_k c_k \cdot \lambda(J_k).$$

Durch Aufspaltung der rechts stehenden Summe in Summanden für die

$$|c_k| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{und} \quad |c_k| \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

gilt, erhalten wir die Abschätzung

$$\varepsilon \leq \left|\int_a^b g(x)\ dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \|g\| \cdot \lambda(S),$$

aus der die Behauptung unmittelbar folgt. Im folgenden bezeichnen wir jede endliche Vereinigung von disjunkten beschränkten Intervallen als Elementarmenge. Als Länge von

$$S = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m$$

erhalten wir

$$\lambda(S) = \lambda(J_1) + \lambda(J_2) + \cdots + \lambda(J_m).$$

Beachte, dass diese Definition nicht von der verwendeten Zerlegung von $S$ in Intervalle abhängt.

**Aussage 2** Sei $(S_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Elementarmengen mit $S_n \subset [a, b]$ und

$$\lambda(S_n) \geq c > 0.$$

Dann gibt es einen Punkt in $[a, b]$, der zu unendlich vielen $S_n$ gehört.

Wir betrachten zunächst den Fall einer Folge abgeschlossener Elementarmengen. Es gibt einen Index $n_1$, so dass für alle $k > n_1$

$$\lambda((S_1 \cup \cdots \cup S_{n_1}) \cap S_k) \geq \frac{c}{2},$$

denn anderfalls gibt es zu jedem $n$ ein $k_n > n$ derart, dass

$$\lambda((S_1 \cup \cdots \cup S_n) \cap S_{k_n}) < \frac{c}{2}.$$

Hieraus folgt mit

$$c \leq \lambda(S_{k_n}) = \lambda(S_{k_n} \backslash (S_1 \cup \cdots \cup S_n)) + \lambda((S_1 \cup \cdots \cup S_n) \cap S_{k_n})$$

die Ungleichung

$$\lambda(S_{k_n} \backslash (S_1 \cup \cdots \cup S_n)) > \frac{c}{2}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\lambda(S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup \cdots \cup S_{k_n}) &\geq \lambda(S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup S_{k_n}) \\
&\geq \lambda(S_1 \cup \cdots \cup S_n) + \lambda(S_{k_n} \backslash (S_1 \cup \cdots \cup S_n)),
\end{aligned}$$

woraus

$$\lambda(S_1 \cup \cdots \cup S_{k_n}) > \lambda(S_1 \cup \cdots \cup S_n) + \frac{c}{2} \geq c + \frac{c}{2}$$

folgt. Mehrmalige Anwendung dieser Überlegung führt auf die Existenz eines Index $r$ mit

$$\lambda(S_1 \cup \cdots \cup S_r) > c + \frac{c}{2} + \cdots + \frac{c}{2} > (b - a)$$

im Widerspruch zu $S_i \subset [a, b]$. Also gibt es einen Index $n_1$, so dass für alle $k > n_1$

$$\lambda((S_1 \cup \cdots \cup S_{n_1}) \cap S_k) \geq \frac{c}{2}.$$

Wir setzen

$$A_1 := S_1 \cup \cdots \cup S_{n_1}$$

und haben für alle $k > n_1$

$$\lambda(A_1 \cap S_k) \geq \frac{c}{2}.$$

Auf die Elementarmengen $S_k^* := A_1 \cap S_k$, $k \geq n_1 + 1$ kann diese Überlegung erneut angewendet werden und führt zur Existenz eines Index $n_2$, so dass für $k > n_2$ gilt

$$\lambda((S_{n_1+1}^* \cup \cdots \cup S_{n_2}^*) \cap S_k^*) \geq \frac{c}{4}.$$

Wir setzen

$$A_2 := S_{n_1+1}^* \cup \cdots \cup S_{n_2}^*$$

und führen diese Überlegung fort. Wir erhalten eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Elementarmengen

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots .$$

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom ist der Durchschnitt aller dieser Mengen nicht leer. Jeder Punkt dieses Durchschnittes liegt aber in mindestens einer der Mengen $S_1, \ldots, S_{n_1}$, in mindestens einer der Mengen $S_{n_1+1}, \ldots, S_{n_2}$, usw.. Er liegt also in unendlich vielen Mengen der Folge $S_n$. Auf die zusätzliche Voraussetzung der Abgeschlossenheit der Elementarmengen $S_n$ kann verzichtet werden, da man von $S_n$ zu abgeschlossenen Elementarmengen $S_n'$ übergehen kann, für die mit einem positiven $c' < c$ gilt

$$\lambda(S_n') \geq c' > 0.$$

**Beweis des Lemma.** Angenommen, die Zahlenfolge $(I(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(I(g_{\varphi(k)})$ derart, dass $|I(g_{\varphi(k)})| \geq \varepsilon$ für alle $k$. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir diese Teilfolge wieder mit $(I(g_n))_n$. Dann gibt es nach Aussage 1 zu jedem $g_n$ eine Elementarmenge $S_n$ mit

$$\lambda(S_n) \geq \frac{\varepsilon}{2 \cdot \|g_n\|}.$$

Da die Folge $(\|g_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, folgt

$$\lambda(S_n) \geq \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}.$$

Nach Aussage 2 gibt es einen Punkt $x \in [a, b]$, der zu unendlich vielen $S_n$ gehört. Da für dieses $x$ die Ungleichung

$$|g_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für unendlich viele $n$ gilt, kann nicht

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$$

gelten. ♣

**BEISPIEL 10.6** *Wir nutzen den Satz von Arzela–Osgood zur Berechnung des unendlichen Produktes*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\frac{2m-1}{2m}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\ \cdots\ .$$

*Partielle Integration von*

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\ dx$$

*liefert die Rekursionsformel*

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\ dx=\frac{2n-1}{2n}\int_0^\pi \sin^{2n-2} x\ dx,$$

*aus der*

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\ dx=\frac{2n-1}{2n}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi 1\ dx=\pi\prod_{m=1}^{n}\frac{2m-1}{2m}$$

*folgt. Im Intervall* $[0,\pi]$ *gilt*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sin^{2n} x=\begin{cases}0 & \textit{für}\quad x\neq\pi/2,\\ 1 & \textit{für}\quad x=\pi/2.\end{cases}$$

*Die Folge konvergiert auf* $[0,\pi]$ *nicht gleichmäßig gegen* $f$ *(*$f$ *unstetig!), als Treppenfunktion ist aber* $f$ *auch Regelfunktion. Ferner ist*

$$\|f_n\|=\sup_{x\in[0,\pi]}|\sin^{2n} x|=1,$$

*also die Zahlenfolge* $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ *beschränkt. Somit gilt*

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{2m} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\frac{2m-1}{2m}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \sin^{2n} x\ dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \lim_{n\to\infty}\sin^{2n} x\ dx=0.\end{aligned}$$

## 10.7 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten die Abbildung $f:[a,b]\times D\to\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $t\in D$ die Abbildung $x\to f(x,t)$, d.h. $f(\cdot,t)$ eine Regelfunktion ist. Dann ist durch

$$F(t):=\int_a^b f(x,t)\ dx$$

eine Funktion $F:D\to\mathbb{R}$ erklärt. Man bezeichnet $t$ als Parameter und sagt, $F$ sei als parameterabhängiges Integral gegeben. Es stellt sich die Frage nach den Eigenschaften der Abbildung $F$ in Abhängigkeit von den Eigenschaften von $f$.

**THEOREM 10.16** *Sei $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h.*

$$|f(x,t)| \le c \qquad \forall (x,t) \in [a,b] \times D.$$

*Für alle $x \in [a,b]$ sei $f(x,\cdot) : D \to \mathbb{R}$ auf $D$ stetig und für alle $t \in D$ sei $f(\cdot,t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ Regelfunktion. Dann ist $F$ gegeben durch*

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx$$

*auf $D$ stetig.*

**Beweis.** Sei $t_0 \in D$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Setze

$$g_n(x) := f(x,t_n).$$

Dann gilt:

(1) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Regelfunktionen,

(2) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x,t_0)$ punktweise auf $[a,b]$ und

(3) $\|g_n\| = \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| \le c$.

Die Anwendung des Satzes von Arzela-Osgood führt auf

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, dx \\ &= \int_a^b f(x,t_0)\, dx = F(t_0). \end{aligned}$$

Da $t_0 \in D$ beliebig war, folgt die Stetigkeit von $F$ auf $D$. ♣

Sei im folgenden $D$ ein Intervall. Ist für festes $x \in [a,b]$ die Funktion $f(x,\cdot) : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $t_0$ differenzierbar, so heißt $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(x,t_0)$ partiell differenzierbar nach $t$, in Zeichen

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(x,t_0+\Delta t) - f(x,t_0)}{\Delta t}.$$

**THEOREM 10.17** *Sei $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}$ für jedes feste $t \in D$ Regelfunktion auf $[a,b]$ und für jedes $x \in [a,b]$ partiell nach $t$ differenzierbar. Die Funktion $\dfrac{\partial f}{\partial t} : [a,b] \times D \to \mathbb{R}$ sei für jedes feste $t$ Regelfunktion auf $[a,b]$ und beschränkt. Dann ist*

$$F(t) := \int_a^b f(x,t)\, dx$$

*auf $D$ differenzierbar und es gilt*

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

**Beweis.** Seien $t \in D$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $t_n \neq t$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Wir haben

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_a^b \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\, dx$$

und setzen

$$g_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}.$$

Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ punktweise auf $[a,b]$,

(2) $g(x) := \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ ist Regelfunktion nach Voraussetzung und

(3) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|g_n(x)| = \left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right| \leq const$$

für $s = t + \theta(t_n - t)$, $\theta \in (0,1)$. Anwendung des Satzes von Arzela-Osgood ergibt

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx \\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \end{aligned}$$

♣

**BEISPIEL 10.7** *Wir betrachten das parameterabhängige Integral*

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx, \qquad t \in D = \{s \in \mathbb{R},\ s \geq 0\}.$$

*Der Integrand*

$$f(x,t) := \frac{x^t - 1}{\ln x} \qquad \textit{für } 0 < x < 1,\ t \in D$$

*kann durch die Festlegung*

$$f(x,t) := \begin{cases} 0 & x = 0,\ \forall t \in D \\ t & x = 1,\ \forall t \in D \end{cases}$$

*stetig auf* $[0,1]\times D$ *fortgesetzt werden. Für die partielle Ableitung erhalten wir*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x=0,\ t\in D, \\ x^t & \textit{für} \quad 0<x<1,\ t\in D, \\ 1 & \textit{für} \quad x=1,\ t\in D. \end{cases}$$

*Somit ist die partielle Ableitung auf* $[0,1]\times\mathbb{R}_0^+$ *beschränkt. Anwendung des obigen Satzes ergibt*

$$F'(t) = \int_0^1 x^t\,dx = \frac{1}{1+t}$$

*oder*

$$F(t) = \ln(1+t) + const.$$

*Wegen*

$$F(0) = \int_0^1 0\,dx = 0$$

*ergibt sich die Konstante zu* 0 *und es gilt*

$$\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,dx = \ln(1+t), \qquad\qquad t\geq 0.$$

## 10.8 Uneigentliche Integrale

Die Definition des Integrals für Regelfunktionen basierte wesentlich auf der Kompaktheit des Integrationsintervalls. Dadurch wird gesichert, dass die bei vielen Überlegungen benötigte Integralabschätzung $|I(f)|\leq(b-a)\|f\|$ gilt.

Im folgenden soll durch geeignete Grenzübergänge die Integraldefinition ausgedehnt werden, und zwar sowohl für den Fall, dass das Integrationsintervall unbeschränkt ist, als auch für den Fall, dass der Integrand in Umgebung einer Stelle nicht beschränkt bleibt oder oszilliert. In diesen Fällen spricht man von *uneigentlichen Integralen.* Eine Reihe von Eigenschaften des gewöhnlichen Integrals lassen sich auf uneigentliche Integrale übertragen, nicht aber die Integralabschätzung und damit auch nicht die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang bei gleichmäßiger Konvergenz.

### 10.8.1 Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall

**DEFINITION 10.4** *Seien* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *auf jedem Intervall* $[a,\omega]$ *Regelfunktion und*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\,dx$$

*existent. Dann heißt der Grenzwert uneigentliches Integral, in Zeichen*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx.$$

*Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konvergiert und dass* $f$ *im Intervall* $[a, \infty)$ *uneigentlich integrierbar ist.*

Ähnlich wie bei Reihen verwendet man das Symbol $\int_a^\infty f(x)\, dx$ nicht nur als Bezeichnung für den Grenzwert sondern – insbesondere wenn die Konvergenzfrage noch offen ist – für die Funktion $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(\omega) = \int_a^\omega f(x)\, dx.$$

Aus dem Zusammenhang wird jeweils klar, welche Bedeutung gemeint ist, so dass Missverständnisse nicht entstehen können.

Auch für uneigentliche Integrale bleiben die Eigenschaften der Linearität, der Positivität und Monotonie erhalten. Die Integralabschätzung kann wegen des Faktors $(b - a)$ in der Abschätzung für eigentliche Integrale nicht erwartet werden. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass auch die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang bei gleichmäßiger Konvergenz nicht übertragbar ist.

**BEISPIEL 10.8** *Die Folge* $(f_n)$ *mit*

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \qquad x \geq 0,$$

*konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion und für jedes* $f_n$ *existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty \frac{n}{n^2 + x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

*Wir haben*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n}{n^2 + x^2}\, dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + x^2}\, dx = 0.$$

**DEFINITION 10.5** *Das uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *heißt absolut konvergent, wenn*

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

*konvergiert.*

Aus dem Cauchy Kriterium ergibt sich, dass aus der absoluten Konvergenz die gewöhnliche Konvergenz folgt. Analog zu den Konvergenzkriterien bei Reihen hat man für die absolute Konvergenz ein Vergleichskriterium.

**THEOREM 10.18** *Seien $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \geq a$, $g$ auf jedem Intervall $[a, \omega]$ mit $\omega \in (a, \infty)$ Regelfunktion und das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(x)\, dx$ konvergent. Dann ist*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

*absolut konvergent.*

**Beweis.** Wegen

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\, dx \leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x)\, dx$$

und der Voraussetzung über $g$ folgt unmittelbar die Behauptung. ♣

**THEOREM 10.19** *(Integralkriterium für Reihen)*
*Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und monoton fallend. dann ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

*genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

*konvergiert.*

**Beweis.** Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k),$$

woraus durch Addition

$$f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1)$$

folgt. Für die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Reihe gilt somit für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq s_{n-1}.$$

Ist das uneigentliche Integral existent, so ist die monoton wachsende Folge $(s_n)$ nach oben beschränkt und damit konvergent. Aus der Konvergenz der Partialsummenfolge $s_n \to s$ folgt, dass für die monoton wachsende Funktion $F$,

$$F(\omega) = \int_1^\omega f(x)\,dx \leq F([\omega]+1) \leq s$$

gilt. Damit ist das uneigentliche Integral konvergent. ♣

### 10.8.2 Weitere Typen uneigentlicher Integrale

**DEFINITION 10.6** *Die Funktion $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ sei in jedem Teilintervall $[\omega, b] \subset (a,b]$ Regelfunktion. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\omega \to a+0} \int_\omega^b f(x)\,dx,$$

*so heißt der Grenzwert uneigentliches Integral, in Zeichen*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

*Man sagt auch, dass $f$ auf $[a,b]$ uneigentlich integrierbar ist.*

Mit dieser erweiterten Integraldefinition werden auch solche beschränkten Integranden erfaßt, die keine Regelfunktion sind. Ein Beispiel hierfür ist $f(x) = \sin(\pi/x)$ auf $(0,1]$. Mittels Substitutionsregel folgt

$$\int_\omega^1 \sin\frac{\pi}{x}\,dx = \int_1^{1/\omega} \frac{\sin \pi t}{t^2}\,dt,$$

woraus wegen der Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_1^\infty \frac{\sin \pi t}{t^2}\,dt$$

die Konvergenz des ursprünglichen Integrals folgt.

Im Fall, dass sich der Integrand an endlich vielen Stellen nicht regulär verhält, spaltet man das Integral in endlich viele Integrale derart auf, dass jeweils nur ein Grenzübergang vorzunehmen ist. Konvergieren alle uneigentlichen Integrale, so heißt das ursprüngliche uneigentliche Integral konvergent.

**BEISPIEL 10.9** *(Gammafunktion)*
*Für $t > 0$ betrachten wir*

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \exp(-x)\, dx.$$

*Für $0 < t < 1$ ist das Integral sowohl an der unteren als auch an der oberen Grenze uneigentlich. Daher splitten wir es auf in die beiden Integrale*

$$\int_0^1 x^{t-1} \exp(-x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty x^{t-1} \exp(-x)\, dx.$$

*Das Majorantenkriterium führt in beiden Fällen zum Ziel. Für $0 < x \leq 1$ und $0 < t < 1$ gilt*

$$x^{t-1} \exp(-x) \leq x^{t-1}$$

*und*

$$\int_0^1 x^{t-1}\, dx = \lim_{\omega \to +0} \int_\omega^1 x^{t-1}\, dx = 1/t$$

*konvergiert. Das zweite Integral konvergiert, da für jedes $t > 0$ eine natürliche Zahl $n \geq t - 1$ existiert, für die*

$$x^{t-1} \exp(-x) \leq x^n \exp(-x)$$

*gilt, und*

$$\int_1^\infty x^n \exp(-x)\, dx$$

*konvergiert.*

**THEOREM 10.20** *Es gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \forall t > 0, \qquad \Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis.** Wir haben zunächst

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-x)\, dx = \lim_{\omega \to \infty} \left\{ - \exp(-x) \Big|_{x=0}^{\omega} \right\} = 1.$$

Mittels partieller Integration folgt für $t > 0$

$$\int_0^\omega x^t \exp(-x)\, dx = -x^t \exp(-x) \Big|_{x=0}^{\omega} + \int_0^\omega x^{t-1} \exp(-x)\, dx$$

woraus durch Grenzübergang $\omega \to \infty$ die Beziehung

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \qquad \forall t > 0$$

folgt. Rekursives Anwenden führt auf $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$. ♣

# 11 Differentialrechnung mehrerer Variablen

Wie im Fall einer Funktion einer reellen Variablen besteht die Grundidee in der Approximation 'beliebiger' Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch lineare Funktionen.

## 11.1 Differenzierbarkeit vektorwertiger Abbildungen

Wir erinnern zunächst daran, dass einer vektorwertigen Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau $m$ skalare Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, entsprechen:

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} y_1 & = & f_1(x) & = & f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & = & f_m(x) & = & f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Wir fassen im folgenden die $m$- und $n$-Tupel im $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren auf. Ist nichts anderes erwähnt, so bezeichnen wir mit $\|.\|$ die Euklidischen Normen in den Räumen $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, wobei jeweils aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, ob die Dimension $n$ oder $m$ beträgt.

**DEFINITION 11.1** *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$. Die Abbildung $f$ heißt im Punkt $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine in $x_0$ stetige Abbildung $r : D \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + M(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|, \qquad x \in D \tag{1}$$

*und $r(x_0) = 0$ gilt. $M$ heißt erste Ableitung von $f$ in $x_0$, in Zeichen $f'(x_0) := M$.*

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass sich lineare Abbildungen $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $m \times n$ Matrizen und die Wirkung von $M$ auf das $n$-Tupel $(x - x_0)$ als Matrix-Vektorprodukt $M(x - x_0)$ charakterisieren lassen. In Komponentenschreibweise kann (1) daher mit $M = (m_{ij})$ in der Form

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_j - x_{0j}) + r_i(x)\|x - x_0\|, \quad x \in D,\ j = 1, \ldots, m$$

geschrieben werden.

**BEMERKUNG 11.1** *Wir fragen, ob im Fall ihrer Existenz $M$ und $r$ eindeutig bestimmt sind. Sei $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der $j$-te Koordinateneinheitsvektor und $t \in \mathbb{R}$ aus einer hinreichen kleinen Umgebung um Null, so dass $x = x_0 + te_j$ in*

*$D$ liegt. Wegen $\|x-x_0\| = |t|\,\|e_j\| = |t|$, der Stetigkeit von $r$ in $x_0$ und $r(x_0)=0$ haben wir*

$$m_{ij} = \lim_{t\to 0} \frac{f_i(x_0+te_j)-f_i(x_0)}{t} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0),$$

*die Abbildung $M$ ist also eindeutig bestimmt. Aus (1) ergibt sich somit auch $r$ in eindeutiger Weise*

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)-M(x-x_0)}{\|x-x_0\|} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0. \end{cases}$$

Wir sehen, dass im Falle der Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ im Punkte $x_0 \in D$, alle partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0$ existieren. Die die lineare Abbildung charakterisierende Matrix

$$M = f'(x_0) = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

heißt Jacobi-Matrix von $f$ in $x_0$. Somit kann (1) auch in Komponentenschreibweise geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_m(x) \end{bmatrix} \|x-x_0\|.$$

**THEOREM 11.1** *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist $f$ in $x_0$ stetig.*

**Beweis.** Aus der Differenzierbarkeit der Funktion $f$ in $x_0$ folgt

$$\|f(x)-f(x_0)\| \leq \|M(x-x_0)\| + \|r(x)\|\,\|x-x_0\|.$$

Die Schwarzsche Ungleichung für endliche Summen beinhaltet

$$\begin{aligned} \|M(x-x_0)\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n m_{ij}(x_j - x_{0j})\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n (x_j - x_{0j})^2\right), \end{aligned}$$

somit gibt es eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\|M(x - x_0)\| \leq K\|x - x_0\|$$

gilt. Nun ist $r$ in $x_0$ stetig mit $r(x_0) = 0$. Wir finden also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass aus $\|x - x_0\| < \delta$ die Ungleichung $\|r(x)\| < \varepsilon$ folgt. Setze

$$\delta^*(\varepsilon) := \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{K + \varepsilon}\right).$$

Dann gilt für alle $x$ mit $\|x - x_0\| < \delta^*(\varepsilon)$ die Beziehung

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq (K + \varepsilon)\|x - x_0\| < \varepsilon,$$

d.h. $f$ ist stetig in $x_0$. ♣

In Abschnitt 5.5 haben wir gesehen, dass die Stetigkeit der vektorwertigen Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in D$ äquivalent zur Stetigkeit aller Komponenten $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ ist. Der nachfolgende Satz zeigt, dass diese Eigenschaft auch im Fall der Differenzierbarkeit gilt.

**THEOREM 11.2** *Die Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar, wenn jede Komponente $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.*

**Beweis:** Sei zunächst $f$ in $x_0$ differenzierbar. Dann gilt für jedes $i = 1, \ldots, m$

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_j - x_{0j}) + r_i(x)\|x - x_0\|, \quad x \in D.$$

Die Abbildung $M_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$M_i z := \sum_{j=1}^{n} m_{ij} z_j, \quad z = (z_1, \ldots, z_n)$$

ist linear und $r_i$ ist in $x_0$ stetig mit $r_i(x_0) = 0$. Also ist jede Komponente $f_i$ in $x_0$ differenzierbar. Sei nun umgekehrt jede Komponente $f_i$ in $x_0$ differenzierbar mit der Ableitung $M_i$, es gilt also für jedes $i = 1, \ldots, m$

$$f_i(x) = f_i(x_0) + M_i(x - x_0) + r_i(x)\|x - x_0\|, \qquad x \in D$$

mit in $x_0$ stetigen Abbildungen $r_i$ und $r_i(x_0) = 0$. Die Komponenten $M_i$ und $r_i$ definieren vektorwertige Abbildungen $M$ und $r$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + M(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|, \qquad x \in D,$$

$r$ in $x_0$ stetig und $r(x_0) = 0$ sind. ♣

## 11.2 Richtungsableitung und Gradient

Wir betrachten in diesem Abschnitt skalare Abbildungen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

**DEFINITION 11.2** *Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $l \in \mathbb{R}^n$ mit $\|l\| = 1$. Die Größe*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tl) - f(x)}{t}$$

*heißt, sofern sie existiert, die Richtungsableitung von $f$ in $x_0$ in Richtung $l$.*

**THEOREM 11.3** *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann existiert in $x_0$ die Richtungsableitung in jede beliebige Richtung $l$ und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = Ml = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) l_i.$$

**Beweis.** Setze $x = x_0 + tl$ in

$$f(x) = f(x_0) + M(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|,$$

nutze die Linearität von $M$ und die Stetigkeit von $r$ mit $r(x_0) = 0$ aus. ♣

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung des Satzes falsch ist.

**BEISPIEL 11.1** *Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Wir haben*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 l_1^2 l_2}{tt^2} = l_1^2 l_2,$$

*aber die Richtungsableitung ist keine lineare Funktion von $l$, d.h. $f$ kann in $x_0$ nicht differenzierbar sein.*

Die Richtungsableitung in Richtung der Koordinatenachsen stimmt mit der entsprechenden partiellen Ableitung überein. Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

**DEFINITION 11.3** *Der Vektor der partiellen Ableitungen*

$$(\text{grad } f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

*heißt Gradient der skalaren Funktion $f$ im Punkt $x$.*

**FOLGERUNG 11.1** *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so existiert der Gradient von $f$ in $x_0$ und für die Richtungsableitung von $f$ in $x_0$ in Richtung von $l$ gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x) = (\text{grad } f)(x) \cdot l.$$

Beachte, dass auch hier die Umkehrung falsch ist. Aus der Existenz des Gradienten folgt nicht notwendig die Existenz der Richtungsableitungen in einer von den Koordinatenrichtungen verschiedenen Richtung.

**BEISPIEL 11.2** *Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

*existiert im Punkt $(0,0)$ der Gradient. Als im Punkt $(0,0)$ unstetige Funktion kann aber $f$ in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein.*

Abschließend geben wir noch ein hinreichendes Kriterium für die Differenzierbarkeit an.

**THEOREM 11.4** *Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung $B(x_0, \rho)$ von $x_0$ partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : B(x_0, \rho) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

*in $x_0$ stetig. Dann ist $f$ in $x_0$ differenzierbar.*

**Beweis.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung können wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) - f(x_{01},x_{02}) &= f(x_1,x_2) - f(x_{01},x_2) + f(x_{01},x_2) - f(x_{01},x_{02}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01} + \theta_1(x_1 - x_{01}), x_2)(x_1 - x_{01}) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02} + \theta_2(x_2 - x_{02}))(x_2 - x_{02}) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01},x_{02})(x_i - x_{0i}) + R^*, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung $R^*$ mit

$$\begin{aligned} R^* &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01} + \theta_1(x_1 - x_{01}), x_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02})\right)(x_1 - x_{01}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02} + \theta_2(x_2 - x_{02})) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})\right)(x_2 - x_{02}) \end{aligned}$$

eingeführt wurde. Da die partiellen Ableitungen in $(x_{01}, x_{02})$ stetig sind, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$, so dass für $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$

$$|R^*| \leq \varepsilon \|x - x_0\|$$

gilt. Dies zeigt, dass $R^*$ in der Form $R^* = r(x)\|x - x_0\|$ geschrieben werden kann und $r$ in $x_0$ stetig mit $r(x_0) = 0$ ist. ♣

## 11.3 Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen

**THEOREM 11.5** *Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei vektorwertige Abbildungen, die im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar sind. Dann ist mit beliebigen $\alpha$ und $\beta$ die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ in $x_0$ differenzierbar und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

**Beweis.** Die Begründung folgt unmittelbar aus der Definition. ♣

Als nächstes untersuchen wir die Differenzierbarkeit von Verkettungen.

**THEOREM 11.6** *Seien $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ und $\Phi = f \circ g$ die Verkettung, also $\Phi(x) = f(g(x))$. Sind $g$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $g$ in $y_0 = g(x_0) \in \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so ist auch die Verkettung $\Phi$ in $x_0$ differenzierbar und es gilt*

$$\Phi'(x_0) = f'(g(x_0)) \circ g'(x_0),$$

*beziehungsweise*

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f_i(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g(x_0)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_0).$$

**Beweis.** In Analogie zum Fall $p = m = n = 1$, siehe Abschnitt 9.1. ♣

**BEMERKUNG 11.2** *Interpretiert man die Ableitungen als entsprechende Rechteckmatrizen, so entspricht der Verkettung von $f'(g(x_0))$ mit $g'(x_0)$ dem Matrixprodukt, in Komponenten geschrieben gilt daher*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(g(x_0)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(g(x_0)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(g(x_0)) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m}(g(x_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

## 11.4 Mittelwertsatz

Wir erinnern an den Mittelwertsatz im Spezialfall $m = n = 1$.

> Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf $(a, b)$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit
>
> $$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass für vektorwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eine analoge Aussage falsch ist.

**BEISPIEL 11.3** *Seien $a = 0$, $b = 2\pi$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ durch*

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix}$$

*gegeben. Dann gilt für alle $\xi \in (0, 2\pi)$*

$$f(b) - f(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 2\pi \begin{bmatrix} -\sin \xi \\ \cos \xi \end{bmatrix} = f'(\xi)(b - a).$$

Sind $a$ und $b$ zwei Punkte einer konvexen, offenen Menge $D$ und ist die skalare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf $D$ differenzierbar, so gilt der Mittelwertsatz:

**THEOREM 11.7** *(Mittelwertsatz)*
*Seien $a$ und $b$ zwei Punkte einer konvexen, offenen Menge $D$ und $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf $D$ differenzierbar. Dann gibt es auf dem $a$ und $b$ verbindenen Segment ein Punkt $\xi = a + \theta(b - a)$, so dass*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

*gilt.*

**Beweis.** Die skalare Funktion $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(t) := f(a + t(b-a))$$

genügt auf $[0,1]$ den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes für Funktionen einer reellen Veränderlichen, wobei insbesondere (Kettenregel)

$$\Phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b-a))\,(b_i - a_i)$$

gilt. Aus

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\xi) \cdot 1$$

folgt nun unmittelbar die Behauptung. ♣

## 11.5 Höhere partielle Ableitungen

**DEFINITION 11.4** *Die Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ habe partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x_i$ in einer Umgebung $B(x_0, \rho)$ von $x_0 \in D$. Existiert die erste Ableitung von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ im Punkt $x_0$ nach $x_j$, so heißt $f$ zweimal partiell nach $x_i$, $x_j$ im Punkt $x_0$ differenzierbar, in Zeichen*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) &:= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(x_0) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0,j-1}, x_{0j} + t, x_{0,j+1}, \ldots, x_{0n}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0n})\right).\end{aligned}$$

*Induktiv kann man auf diese Weise partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung einführen, etwa die partielle Ableitung dritter Ordnung nach $x_i$, $x_j$, $x_k$ als*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0) := \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right)(x_0).$$

**BEMERKUNG 11.3** *Häufig findet man die abkürzende Schreibweise unter Verwendung sogenannter Multiindizes. Ein Multiindex ist ein $n$-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen $\alpha_i \geq 0$ mit $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Man schreibt dann*

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

*Man beachte, dass diese Schreibweise nur Sinn macht, wenn die Differentiationsreihenfolge keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, also etwa*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

*gilt.*

**THEOREM 11.8** *(H.A. Schwarz)*
*Seien die gemischten zweiten partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

*in einer Umgebung $B(x_0, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ existent und in $x_0$ stetig. Dann ist die Differentiationsreihenfolge vertauschbar, genauer gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

**Beweis.** Zum Nachweis genügt es eine Abbildung von zwei Variablen zu betrachten. In Umgebung von $(x_0, y_0)$ betrachten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} W &:= f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y) + f(x_0,y_0) \\ &= \Phi(x) - \Phi(x_0) \end{aligned}$$

mit $\Phi(x) := f(x,y) - f(x,y_0)$, so dass

$$\begin{aligned} W &= \Phi'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0)\right)(x - x_0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0))(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

mit Zahlen $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Setzt man $\Psi(y) := f(x,y) - f(x_0,y)$, so kann $W$ auch in der Form

$$\begin{aligned} W &= \Psi(y) - \Psi(y_0) \\ &= \Psi'(y_0 + \theta_3(y - y_0))(y - y_0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta_3(y - y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_3(y - y_0))\right)(y - y_0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4(x - x_0), y_0 + \theta_3(y - y_0))(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

zusammengefaßt werden. In Umgebung von $(x_0, y_0)$ gilt für $x \neq x_0$ und $y \neq y_0$ somit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4(x - x_0), y_0 + \theta_3(y - y_0)),$$

woraus durch Grenzübergang und der Stetigkeit der gemischten Ableitungen die Behauptung folgt. ♣

Das folgende Beispiel zeigt, dass auf die Stetigkeit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen nicht verzichtet werden kann.

**BEISPIEL 11.4** *Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für} \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases}$$

*Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar (warum?), insbesondere gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = \begin{cases} x_1 & \text{für} \quad x_1 \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x_1 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = \begin{cases} -x_2 & \text{für} \quad x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x_2 = 0. \end{cases}$$

*Im Ursprung haben wir aber*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

*und*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

**BEMERKUNG 11.4** *Neben den höheren partiellen Ableitungen kann man auch den Begriff der höheren Ableitung als multilineare Abbildung (linear in jeder Variablen) definieren. Ein hinreichendes Kriterium für die 'Differenzierbarkeit' $k$-ter Ordnung von $f$ in $x_0$ ist dann die Existenz aller partieller Ableitungen der Ordnung $k$ in Umgebung von $x_0$ und die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $k$-ter Ordnung in $x_0$. Insbesondere ist die $k$-mal stetige Differenzierbarkeit zur Existenz stetiger partieller Ableitungen der Ordnung $k$ äquivalent.*

**DEFINITION 11.5** *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D$ $k$-mal differenzierbar und die $k$-ten Ableitungen auf $D$ stetig. Dann heißt $f$ auf $D$ $k$-mal stetig differenzierbar. Die Menge aller auf $D$ $k$-mal stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{C}^k(D)$, die Menge aller auf $D$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit $\mathcal{C}^\infty(D)$ bezeichnet.*

## 11.6 Taylorsche Formel

Ziel ist die Verallgemeinerung der Taylorschen Formel aus Abschnitt 9.7 auf den Fall skalarer Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f \in \mathcal{C}^n(D)$. Dann genügt die Funktion einer rellen Veränderlichen $\Phi$ mit

$$\Phi(t) := f(x_0 + th), \quad t \in \mathbb{R}, \ |t| < \delta$$

den Voraussetzungen der Taylorschen Formel aus Abschnitt 9.7. Für eine kompakte Schreibweise führen wir den formalen Differentialoperator 'Nabla' durch

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

ein. Die Ableitungen von $\Phi$ bestimmen sich nach der Kettenregel dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th)\; h_i = (h \cdot \nabla f)(x_0 + th) \\
\Phi''(t) &= \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x_0 + th)\; h_{i_1} h_{i_2} = ((h \cdot \nabla)^2 f)(x_0 + th).
\end{aligned}$$

Hier wurde formal die Schreibweise

$$h \cdot \nabla = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(h \cdot \nabla)^2 &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\
&= h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 partial x_2} + \cdots + h_2 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + \cdots + h_n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\
&= \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}
\end{aligned}$$

verwendet. Für die $k$-te Ableitung erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi^{(k)}(t) &= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} \ldots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x_0 + th) \\
&= \left((h \cdot \nabla)^k f\right)(x_0 + th).
\end{aligned}$$

Ausgehend von der Taylorschen Formel mit Restglieddarstellung nach Lagrange erhalten wir

$$\Phi(1) = \sum_{\nu = 0^{k-1}} \frac{\Phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} + \frac{\Phi^{(k)}(\theta)}{k!}, \qquad \theta \in (0, 1),$$

und eingesetzt

$$f(x_0 + h) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{1}{\nu!} \left((h \cdot \nabla)^\nu f\right)(x) + \frac{1}{k!} \left((h \cdot \nabla)^k f\right)(x_0 + \theta h), \qquad \theta \in (0, 1).$$

Somit gilt der folgende Satz

**THEOREM 11.9** *(Taylorsche Formel)*
*Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Dann gilt für $f \in \mathcal{C}^k(D)$ und $x_0, x_0 + h \in D$*

$$f(x_0 + h) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{1}{\nu!} \left((h \cdot \nabla)^\nu f\right)(x) + \frac{1}{k!} \left((h \cdot \nabla)^k f\right)(x_0 + \theta h), \qquad \theta \in (0, 1).$$

**BEISPIEL 11.5** *Wir bestimmen das Taylorpolynom 2. Grades von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^x \cos y$ an der Stelle $(0, 0)$. Wir haben*

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -e^x \sin y$$

*und*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y.$$

*Einsetzen der Entwicklungsstelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ergibt für $x = x_0 + h_1$ $y = y_0 + h_2$ schließlich*

$$e^x \cos y \approx 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

## 11.7 Lokale Extremwerttheorie

**DEFINITION 11.6** *$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein lokales Minimum (lokales Maximum), wenn in einer Umgebung $U(x_0)$*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad (f(x) \leq f(x_0)).$$

**THEOREM 11.10** *(Notwendige Bedingungen für Extrema)*
*Seien $x_0$ ein lokales Extrema der Abbildung $f$ und $f$ habe in $x_0$ eine Richtungsableitung in Richtung von $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $\|l\| = 1$. Dann verschwindet die Richtungsableitung im Punkt $x_0$ in Richtung von $l$, d.h.*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = 0.$$

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall eines lokalen Minimums. Der Differenzenquotient in Richtung von $l$

$$\frac{f(x_{01} + tl_1, \ldots, x_{0n} + tl_n) - f(x_{01}, \ldots, x_{0n})}{t}$$

ist für $t > 0$ nichtnegativ und für $t < 0$ nicht positiv. Durch Grenzübergang $t \to 0$ folgt die Behauptung. ♣

**BEMERKUNG 11.5** *Existiert* grad $f$ *im Punkt* $x_0$, *so ist im Falle eines Extremum in* $x_0$ *auch* $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$. *Die Suche nach 'extremwertverdächtigen' Punkten* $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ *führt somit auf ein (im allgemeinen) nichtlineares Gleichungssystem der Form*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, \dots, x_{0n}) &= 0 \\ \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, \dots, x_{0n}) &= 0 \end{aligned}$$

**THEOREM 11.11** *(Hinreichende Bedingungen für ein Extrema)*
*Seien* $f \in \mathcal{C}^2(B(x_0, \rho))$, $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$ *und die Hesse-Matrix in* $x_0$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

*positiv definit (negativ definit), d.h. es gibt eine Konstante* $\gamma > 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \geq \gamma \|h\|^2 \quad (\leq -\gamma \|h\|^2).$$

*Dann hat* $f$ *in* $x_0$ *ein lokales Minimum (lokales Maximum).*

**Beweis.** Anwendung der Taylorschen Formel mit $(\operatorname{grad} f)(x_0) = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{1}{2}(h \cdot \nabla)^2 f(x_0 + \theta h) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + R, \end{aligned}$$

wobei die Abkürzung $R$ für

$$R := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right) h_i h_j$$

steht. Aus der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von $f$ in $x_0$ folgt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \delta(\varepsilon)$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right| < \varepsilon, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Somit kann $R$ in der Form

$$|R| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1} h_i h_j = \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{i=1}^{n} h_i \right)^2 \leq \frac{\varepsilon n}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \frac{\varepsilon n}{2} \|h\|^2$$

abgeschätzt werden. Wir wählen $\varepsilon$ genügend klein, so dass $\varepsilon n < \gamma$ ist und erhalten für den Zuwachs

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \frac{1}{2}(h \cdot \nabla)^2 f(x_0) + R \\ &\geq \frac{\gamma}{2}\|h\|^2 - \frac{\varepsilon n}{2}\|h\|^2 \\ &\geq \frac{\gamma - \varepsilon n}{2}\|h\|^2 > 0 \end{aligned}$$

für $h \neq 0$, was zu bewiesen war. ♣

**BEISPIEL 11.6** *Für die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3ax - 3by$$

*bestimme man alle lokalen Extrema. Zunächst haben wir folgende partielle Ableitungen erster Ordnung*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 3a, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 3b$$

*und die partiellen Ableitungen 2.Ordnung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

*Setzt man die ersten partiellen Ableitungen Null, so erhält man als 'extremwertverdächtigen Punkt' $(x_0, y_0) = (2a + b, a + 2b)$. Die Hesse-Matrix in $(x_0, y_0)$ ist*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

*und hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Sie ist also positiv definit. Damit hat $f$ in $(x_0, y_0)$ ein lokales Minimum.*

## 11.8 Umkehrabbildungen

**DEFINITION 11.7** *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : D \to W$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann heißt $f : D \to W$ diffeomorph oder ein Diffeomorphismus, wenn es eine differenzierbare Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to D$ gibt, d.h. $f$ ist bijektiv und $f^{-1}$ ist differenzierbar.*

Bezeichnen wir $y = f(x)$, so erhalten wir durch Differentiation von

$$x = f^{-1}(f(x)) \quad \text{und} \quad y = f(f^{-1}(y))$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) &= id_{\mathbb{R}^n} \\ f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) &= id_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

wobei $id_{\mathbb{R}^n}$ und $id_{\mathbb{R}^m}$ die identischen Abbildungen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ bezeichnen. Aus der lineare Algebra wissen wir bereits, dass dies nur gelten kann, wenn $n = m$ und $\det(f'(x_0)) \neq 0$ ist. Ferner ist

$$\left(f^{-1}\right)' = [f']^{-1} \circ f^{-1}$$

mit der inversen Matrix $[f']^{-1}$. Sind nun also $f$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und $f^{-1}$ eine $\mathcal{C}^l$-Abbildung mit $1 \leq l < k$, so folgt durch Differentiation, dass $f^{-1}$ eine $\mathcal{C}^{l+1}$-Abbildung, induktiv also eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist.

Sei $f : D \to W$ stetig differenzierbar, surjektiv und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Ist dann $f$ diffeomorph? Im Fall einer Funktion einer reellen Veränderlichen ist dies so, denn aus $f'(x) \neq 0$ folgt ja bereits die strenge Monotonie, also die Injektivität. Aber im Fall $n > 1$ ist dies nicht so, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 11.7** *(Polarkoordinaten)*
*Betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mit der Zuordnungsvorschrift*

$$(r, \varphi) \mapsto r(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

*Die Jacobi-Matrix*

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

*hat die Determinante $r \neq 0$, dennoch ist $f$ nicht injektiv, denn wir haben $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$.*

Bestenfalls können wir also nur lokale Invertierbarkeit erwarten.

**DEFINITION 11.8** *Eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $f : D \to W$ heißt lokal um $x_0 \in D$ invertierbar, wenn es offene Umgebungen $D_1$ von $x_0$ und $W_1$ von $y_0 = f(x_0)$ gibt, so dass die Einschränkung*

$$f\big|_{D_1} : D_1 \to W_1$$

*invertierbar ist.*

**THEOREM 11.12** *(Satz über die Umkehrfunktion)*
*Seien $D$ und $W$ offen in $\mathbb{R}^n$, sei $x_0 \in D$ und $f : D \to W$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung. Dann ist $f$ genau dann lokal um $x_0$ invertierbar, wenn die Determinante der Jacobi-Matrix nicht verschwindet. Die lokale Umkehrung $f^{-1}$ ist dann auch eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung.*

**Beweis.** Nach den obigen Bemerkungen genügt es, den Fall $k = 1$ zu betrachten. Der Beweis basiert auf ein lokales Fixpunktargument. In Umgebung von $x_0$ betrachten wir die Abbildung

$$\Phi(x) := x - [f'(x)]^{-1} \circ (f(x) - y)\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $f'$ und der Invertierbarkeit in $x_0$, ist in einer Umgebung von $x_0$ auch $f'$ invertierbar und damit $\Phi$ in einer Umgebung von $x_0$ definiert. Wählt man eine abgeschlosse Kugel $A = \overline{B(x_0, r)} \subset \mathbb{R}^n$ mit hinreichend kleinem Radius, so ist $\Phi : A \to A$ eine kontraktive Abbildung von $A$ in sich. ♣

# 12 Kurvenintegrale

## 12.1 Kurven und Kurvenstücke

Ziel des Abschnittes ist die Präzisierung des Begriffes 'krumme' Linie bzw. Bahn eines Teilchens.

**DEFINITION 12.1** *Sei $I = [a, b]$ und $\alpha : I \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann heißen $\alpha$ Weg im $\mathbb{R}^d$, $\alpha(a)$ Anfangspunkt, $\alpha(b)$ Endpunkt und das Bild $\alpha([a, b])$ Spur des Weges.*

Man stellt leicht fest, dass verschiedene Wege die gleiche Spur haben können. Mit dem Begriff Kurve verbindet man mehr die Spur eines Weges, in diesem Sinne sollen zwei Wege mit gleicher Spur die gleiche Kurve bezeichnen. Diese Identifikation soll aber nicht soweit gehen, dass der Durchlaufungssinn oder die Anzahl der Durchläufe nicht mehr erkennbar werden.

**DEFINITION 12.2** *Zwei Wege $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ heißen äquivalent, wenn es eine streng monoton wachsende, stetige Abbildung $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ gibt, so dass $\Phi(a) = c$, $\Phi(b) = d$ und*

$$\alpha(t) = \beta(\Phi(t))$$

*gilt.*

Die eingeführte Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, bestimmt also eine Klasseneinteilung in der Menge aller Wege. Eine Äquivalenzklasse von Wegen heißt (stetige) Kurve. Man nennt jeden Repräsentanten einer Kurve eine Darstellung der Kurve oder auch eine Parametrisierung der Kurve. Im folgenden betrachten wir Kurven mit stetig differenzierbarer Parametrisierung.

**DEFINITION 12.3** *Eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^d$ heißt auf $I \subset \mathbb{R}$ regulär, falls der Tangentenvektor $\dot{\alpha}(t)$ an keiner Stelle $t \in I$ verschwindet.*

**BEISPIEL 12.1** *(Archimedische Spirale, vgl. Abb. 2)*
*Sei für $t > 0$ eine Parametrisierung durch*

$$t \mapsto \alpha(t) := \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$$

*gegeben. Wegen*

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} = \sqrt{1 + t^2} \neq 0$$

*ist die Archimedische Spirale auf $(0, \infty)$ regulär.*

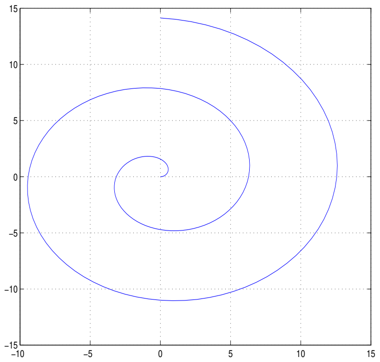



Abbildung 2: Darstellung der Archimedischen Spirale aus Bsp. 12.1 mit $t \in [0; \frac{9\pi}{2}]$.

**BEISPIEL 12.2** *(Schraubenlinie, vgl. Abb. 3)*
*Sei für* $t \in \mathbb{R}$ *eine Parametrisierung durch*

$$t \mapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

*gegeben. Wegen*

$$\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| = \sqrt{r^2 + h^2} > 0$$

*ist die Schraubenlinie auf* $(-\infty, +\infty)$ *regulär.*

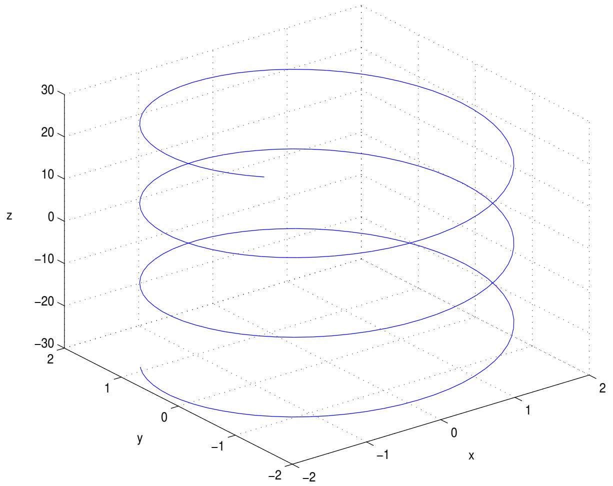



Abbildung 3: Darstellung der Schraubenlinie aus Bsp. 12.2 mit $t \in [-10; 10]$, r=2 und h=3.

**BEISPIEL 12.3** *(Zykloide, vgl. Abb. 4)*
*Sei für $t \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung durch*

$$t \mapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

*gegeben. Wegen*

$$\| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \| = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2|sin\frac{t}{2}|$$

*ist die Zykloide für $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (Umkehrpunkte) nicht regulär.*

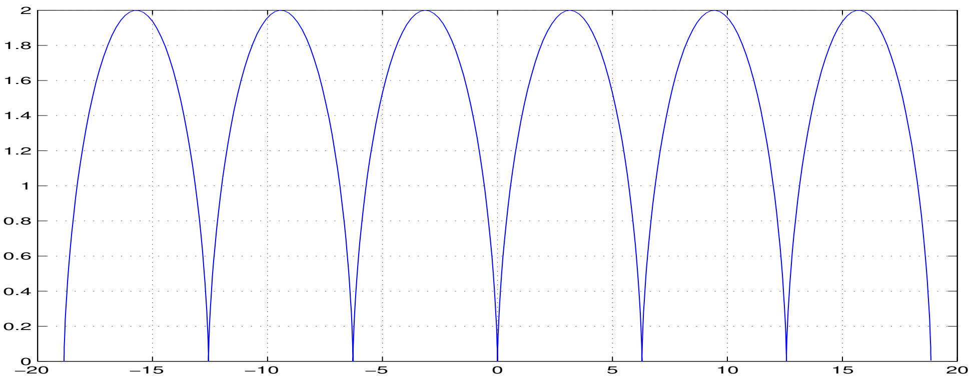



Abbildung 4: Darstellung der Zykloide aus Bsp. 12.3 mit $t \in [-6\pi; 6\pi]$.

**DEFINITION 12.4** *Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^d$ heißt $\mathcal{C}^k$-Kurvenstück, wenn $C$ das Bild einer injektiven, regulären $\mathcal{C}^k$-Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ mit $k \geq 1$, $a < b$ ist. Jede solche Darstellung heißt $\mathcal{C}^k$-Parametrisierung.*

**THEOREM 12.1** *(Parametertransformation)*
*Zu je zwei $\mathcal{C}^k$-Parametrisierungen eines Kurvenstückes $C$*

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^d, \qquad \beta : [c, d] \to \mathbb{R}^d$$

*gibt es einen $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\Phi$ von $[a, b]$ auf $[c, d]$, so dass*

$$\alpha(t) = \beta(\Phi(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

**Beweis.** Setze $\Phi = \beta^{-1} \circ \alpha$. ♣

## 12.2 Länge von Kurvenstücken

Betrachten wir eine Kurve im $\mathbb{R}^d$ und endlich viele Teilpunkte $P_0, P_1, \ldots, P_N \in C$. Zu den Teilpunkten $P_0, P_1, \ldots, P_N \in C$ gehört das Sehnenpolygon $S$ mit der Länge

$$l(S) = \sum_{i=0}^{N-1} |P_{i+1} - P_i|.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung nimmt die Länge bei Hinzunahme weiterer Teilpunkte nicht ab.

**DEFINITION 12.5** *Ist die Länge aller Sehnenpolygone nach oben beschränkt, so heißt die Kurve $C$ rektifizierbar und*

$$L(C) := \sup_S l(S)$$

*die Länge der Kurve $C$.*

**THEOREM 12.2** *(Rektifizierbarkeit von Kurvenstücken)*
*Jedes $\mathcal{C}^1$-Kurvenstück ist rektifizierbar. Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine $\mathcal{C}^1$-Parametrisierung von $C$, so gilt*

$$L(C) = \int_a^b \| \dot{\alpha}\ (t)\|\, dt.$$

Zum Beweis des Satzes benötigen wir eine Abschätzung der Norm eines Integrals vektorwertiger Funktionen.

**LEMMA 12.1** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt.$$

**Beweis:** Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ Treppenfunktion mit $g(t) = c_k$ für $t \in (t_k, t_{k+1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b g(t)dt \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{N-1} c_k(t_{k+1} - t_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|c_k\|\, (t_{k+1} - t_k) = \int_a^b \|g(t)\|\, dt. \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang folgt für eine $f$ approximierende Folge gleichmäßig konvergenter Treppenfunktionen $g_k$ aus

$$\left\| \int_a^b g_k(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|g_k(t)\|\, dt$$

die Behauptung wegen

$$\left| \ \|g_k(t)\| - \|f(t)\| \ \right| \leq \|g_k(t) - f(t)\| \leq \|g_k - f\|.$$

♣

**Beweis:** Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit den Teilpunkten $P_i = \alpha(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ und dem zugeordneten Sehnenpolygon $S$ der Länge

$$l(S) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|.$$

Für jede Komponente $\alpha_j$, $j = 1, \ldots, d$, gilt

$$(\alpha_j(t_{i+1}) - \alpha_j(t_i)) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\alpha}_j\ (t)\ dt,$$

woraus

$$\|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\alpha}\ (t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\ \dot{\alpha}\ (t)\|\ dt$$

und durch Addition

$$l(S) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \leq \int_a^b \|\ \dot{\alpha}\ (t)\|\ dt$$

folgen. Da die rechte Seite unabhängig von der Wahl der Zerlegung ist, ist $C$ rektifizierbar und es gilt

$$l(C) \leq \int_a^b \|\ \dot{\alpha}\ (t)\|\ dt.$$

Wir zeigen nun, dass für eine vorgegebene Toleranz $\varepsilon > 0$ ein Sehnenpolygonzug existiert mit

$$\left| \int_a^b \|\ \dot{\alpha}\ (t)\|\ dt - l(S) \right| < \varepsilon.$$

Für jede Zerlegung von $[a,b]$ gilt durch Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned} l(S) &= \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \sum_{j=1}^{d} |\alpha_j(t_{i+1}) - \alpha_j(t_i)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left( \sum_{j=1}^{d} |\alpha_j'(\tau_{ij})(t_{i+1} - t_i)|^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \sum_{j=1}^{d} |\alpha_j'(\tau_{ij})|^2 \right)^{1/2} (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Andererseits können wir das Integral über die stetige Funktion $\| \dot{\alpha}(t)\|$ durch ein Integral über eine Treppenfunktion mit der Toleranz $\varepsilon/2$ approximieren, genauer: es gibt eine Zerlegung von $[a,b]$, so dass

$$\left| \int_a^b \| \dot{\alpha}(t)\| \, dt - \sum_{i=0}^{N-1} \| \dot{\alpha}(t_i)\| \, (t_{i+1}-t_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\sigma := \sum_{i=0}^{N-1} \| \dot{\alpha}(t_i)\| \, (t_{i+1}-t_i), \qquad \beta^i_j := \alpha'_j(\tau_{ij})$$

ist für diese Zerlegung nun aber

$$\begin{aligned} |\sigma - l(S)| &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \| \dot{\alpha}(t_i)\| - \|\beta^i\| \right\} (t_{i+1}-t_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \Big| \, \| \dot{\alpha}(t_i)\| - \|\beta^i\| \, \Big| (t_{i+1}-t_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \| \dot{\alpha}(t_i) - \beta^i \| (t_{i+1}-t_i). \end{aligned}$$

Jede Komponente $\dot{\alpha}_j$ ist auf der kompakten Menge $[a,b]$ gleichmäßig stetig, also

$$| \dot{\alpha}_j(t_i) - \dot{\alpha}_j(\tau_{ij})| < \frac{\varepsilon}{2d(b-a)} \qquad \Longrightarrow \qquad \| \dot{\alpha}(t_i) - \beta^i\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

falls nur $|t_{i+1}-t_i| < \delta(\varepsilon)$ gilt. Somit haben wir

$$|\sigma - l(S)| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_{i+1}-t_i) = \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\left| \int_a^b \| \dot{\alpha}(t)\| \, dt - l(S) \right| \leq \left| \int_a^b \| \dot{\alpha}(t)\| \, dt - \sigma \right| + |\sigma - l(S)| < \varepsilon.$$

durch Anwendung der Dreiecksungleichung. ♣

**DEFINITION 12.6** *Sind $C_1, \ldots, C_N$ rektifizierbare Kurvenstücke im $\mathbb{R}^d$, von denen sich je zwei in höchstens endlich vielen Punkten treffen, so nennen wir die Vereinigung $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_N$ eine Kette von Kurvenstücken. Als Länge einer solchen Kette wird*

$$L(C) := \sum_{i=1}^{N} L(C_i)$$

*definiert. Diese Längendefinition einer Kette ist unabhängig von der Zerlegung der Kette in rektifizierbare Kurvenstücke.*

## 12.3 Skalare Kurvenintegrale

**DEFINITION 12.7** *Sei auf einem Kurvenstück $C$ eine reellwertige Abbildung $f : C \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass für eine Parametrisierung $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ von $C$ die Abbildung $f(\alpha(.)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Nach dem Satz über Parametertransformation ist dann $f(\beta(.))$ stetig für jede Parametrisierung von $C$. Skalares Kurven- bzw. Wegintegral von $f$ über $C$ heißt der Ausdruck*

$$\int_C f\, ds := \int_C f(x)\, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \|\, dt.$$

*Die Größe $ds := \| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \|\, dt$ heißt skalares Bogenelement.*

Das skalare Kurvenintegral ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung von $C$, denn für $\alpha(t) = \beta(\Phi(t))$, $t \in [a,b]$, $r = h(t)$, $r \in [c,d]$ erhalten wir bei Anwendung der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\beta(r)) \| \overset{\bullet}{\beta}(r) \|\, dr &= \int_a^b f(\beta(\Phi(t))) \| \overset{\bullet}{\beta}(\Phi(t)) \|\, |\Phi'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b f(\alpha(t)) \| \overset{\bullet}{\alpha}(t) \|\, dt. \end{aligned}$$

**DEFINITION 12.8** *Seien $C = \cup_{i=1}^N C_i$ eine Kette von Kurvenstücken $C_i$, und $f : C \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass auf jedem Kurvenstück $C_i$ mit der Parametrisierung $\alpha_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, N$, die Funktion $f \circ \alpha_i$ auf $[a_i, b_i]$ stetig ist. Als Kurvenintegral über die Kette $C$ versteht man den Ausdruck*

$$\int_C f(x)\, ds := \sum_{i=1}^N \int_{C_i} f(x)\, ds = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} f(\alpha_i(t)) \| \overset{\bullet}{\alpha}_i(t) \|\, dt$$

## Eigenschaften skalarer Kurvenintegrale

**Linearität**

$$\int_C (\lambda f + \mu g)\, ds = \lambda \int_C f\, ds + \mu \int_C g\, ds$$

**Integralabschätzung**

$$\left| \int_C f\, ds \right| \leq L(C) \sup_{x \in C} |f(x)|$$

Wir betrachten nun Anwendungen des skalaren Kurvenintegrals in der Physik. Ein Draht mit der Massendichte $\rho(x)$ (Masse pro Länge) sei durch ein Kurvenstück oder eine Kurvenkette $C \subset \mathbb{R}^3$ idealisiert. Dann sind

$$M = \int_C \rho(x)\, ds$$

die Gesamtmasse des Drahtes und $S = (s_1, s_2, s_3)$ mit

$$s_k := \frac{1}{M} \int_C x_k \rho(x)\, ds, \quad k = 1, 2, 3$$

ist der Schwerpunkt.

**BEISPIEL 12.4** *(Schwerpunkt eines Seiltänzers mit Balancierstange)*
*Der Seiltänzer sei durch*

$$C_1 := \{(0, t) : 0 \leq t \leq 1.8\}$$

*mit* $\rho_1 = 32$ *und die Balancierstange durch*

$$c_2 = \{(t, 1.2 - 0.05t^2) : \ |t| \leq 4\}$$

*mit* $\rho_2 = 2$ *idealisiert. Zunächst bestimmen wir die Gesamtmasse*

$$M = \int_{C_1} \rho_1\, ds + \int_{C_2} \rho_2\, ds = 32 \int_0^{1.8} 1\, dt + 2 \int_{-4}^{+4} \sqrt{1 + \frac{t^2}{100}}\, dt$$

*Anwendung der partiellen Integration und der Substitutionsmethode ergibt*

$$\int \sqrt{1 + \frac{t^2}{100}}\, dt = \frac{t}{2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{100}} + 5 \operatorname{arsinh} \frac{t}{10},$$

*so dass wir*

$$M = 57.6 + \frac{4}{5}\sqrt{29} + 10 \operatorname{arsinh} \frac{2}{5} \sim 65.8085$$

*erhalten. Die x-Koordinate des Schwerpunktes ergibt sich zu Null. Für die y-Koordinate haben wir*

$$y_s = \frac{1}{M} \int_{C_1} y\rho_1\, ds + \frac{1}{M} \int_{C_2} y\rho_2\, ds = \frac{32}{M} \int_0^{1.8} t\, dt + \frac{2}{M} \int_{-4}^{+4} (1.2 - 0.05t^2) \sqrt{1 + \frac{t^2}{100}}\, dt$$

*Für das zweite Integral wenden wir die Substitutionsregel an und erhalten*

$$y_s = \frac{16}{M} \cdot 3.24 + \frac{49}{M} \operatorname{arsinh} \frac{2}{5} + \frac{9.6}{M} \sqrt{\frac{29}{25}} - \frac{10}{M} \sqrt{\frac{29}{25}} \frac{33}{25} \sim 1.0346$$

## 12.4 Vektorielle Kurvenintegrale

**DEFINITION 12.9** *Unter einem Vektorfeld auf* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *verstehen wir im folgenden eine stetige Abbildung* $v : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. *Ist* $v$ *auf* $\Omega$ *r-mal stetig differenzierbar, so spricht man von einem* $\mathcal{C}^r$*-Vektorfeld.*

Anschaulich denkt man sich jeden Vektor $v(x)$ im Punkt $x$ angeheftet. Beispiele von Vektorfeldern in der Physik sind Geschwindigkeitsfelder von Gasen oder Flüssigkeiten, Gravitationsfelder, elektrische und magnetische Felder. Oft hängen diese Felder noch zusätzlich von der Zeit ab.

**DEFINITION 12.10** *Seien $v : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld auf $\Omega$ und $C$ eine reguläre $\mathcal{C}^1$-Kurve in $\Omega$ mit der Parametrisierung $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. Das vektorielle Kurven- oder Wegintegral ist durch*

$$\int_C v \cdots dx := \int_C v_1 dx_1 + \cdots + v_d dx_d = \int_a^b v(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\, dt$$

*definiert. Das Symbol $dx = \dot{\alpha}(t)\, dt$ steht dabei für das vektorielle Bogenelement.*

Beispiele für vektorielle Kurvenintegrale in der Physik sind

| Vektorfeld | Kurvenintegral |
|---|---|
| Kraftfeld | Arbeit |
| Geschwindigkeitsfeld | Zirkulation |
| elektrische Feldstärke | elektrische Spannung |
| infinitesimale Wärmeänderung | Wärmemenge |

Sind $C$ ein $\mathcal{C}^1$-Kurvenstück und $\alpha$, $\beta$ zwei $\mathcal{C}^1$-Parametrisierungen, so gibt es eine Parametertransformation $\Phi$ mit $\alpha = \beta \circ \Phi$. Wegen

$$\dot{\alpha}(t) = \beta(\dot{\Phi}(t)) \cdot \Phi'(t),$$

ändert sich das Vorzeichen des Kurvenintegrals im Falle $\Phi'(t) < 0$. Wir versehen die Kurve mit einer Orientierung und nennen eine Parametertransformation orientierungstreu, falls $\Phi'(t) > 0$. Unter orientierungstreuen Parametertransformationen bleibt das vektorielle Kurvenintergral invariant.

**BEISPIEL 12.5** *Ein Massenpunkt im Ursprung erzeugt ein Gravitationsfeld, das bis auf einen konstanten Faktor gegeben ist durch*

$$K(x) = -\frac{x}{\|x\|^3} = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

*Wird ein zweiter Massenpunkt der Masse 1 längs einer Kurve $C \subset \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ mit der Parametrisierung $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ bewegt, so ist die an ihm geleistete Arbeit das Wegintegral*

$$\int_C K \cdot dx = -\int_a^b \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|^3} \cdot \dot{\alpha}(t)\, dt$$

*Wegen*

$$\frac{d}{dt}\frac{2}{\|\alpha(t)\|} = -\frac{\alpha(t)\cdot \dot{\alpha}(t)}{\|\alpha(t)\|3}$$

*haben wir*

$$\int_C K \cdot dx = \frac{2}{\alpha(b)} - \frac{2}{\alpha(a)}.$$

*Wir sehen hieraus, dass in diesem Kraftfeld entlang geschlossener Kurven, keine Arbeit geleistet wird.*

**DEFINITION 12.11** *Seien $v : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld und $\alpha_k : [a_k, b_k] \to \Omega$ Parametrisierungen regulärer Kurven $C_k$ so dass die Endpunkte $\alpha_k(b_k)$ mit den Anfangspunkten $\alpha_{k+1}(a_{k+1})$, $k = 1, \ldots, N-1$, zusammenfallen. Wir nennen $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$ stückweis glatte Kurve und definieren die Länge der stückweis glatten Kurve durch $L(C) = L(C_1) + \cdots + L(C_N)$ sowie das Kurvenintegral durch*

$$\int_C v \cdot dx := \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} v \cdot dx$$

## Eigenschaften vektorieller Kurvenintegrale

**Additivität**

$$\int_{C_1+C_2} v \cdot dx = \int_{C_1} v \cdot dx + \int_{C_2} v \cdot dx$$

**Linearität**

$$\int_C (\lambda v + \mu w) \cdot dx = \lambda \int_C v \cdot dx + \mu \int_C w \cdot dx$$

**Integralabschätzung**

$$\left| \int_C v \cdot dx \right| \leq L(C) \sup_{x \in C} \|v(x)\|$$

**BEISPIEL 12.6** *Fließt durch einen Draht, der auf der $x_3$-Achse liegt, ein konstanter Strom, so erzeugt dieser nach dem Biot-Savartschen Gesetz ein Magnetfeld außerhalb des Drahtes, das durch*

$$H(x) = \frac{I}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^3} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*gegeben ist. Die Integration über eine geschlossene Kurve, etwa einen Kreis $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$ ergibt*

$$\int_C H \cdot dx = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}(r^2 \sin^2 x + r^2 \cos^2 + 0) dx = \frac{1}{2r}.$$

## 12.5 Konservative Vektorfelder und Potentiale

**DEFINITION 12.12** *Ein Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt auf $\Omega$ konservativ, wenn das Kurvenintegral über stückweis glatte Kurven in $\Omega$ nur vom Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom übrigen Verlauf abhängt.*

**FOLGERUNG 12.1** *Ein Vektorfeld $v$ ist genau dann auf $\Omega$ konservativ, wenn das Kurvenintegral über alle geschlossenen stückweis glatten Kurven in $\Omega$ verschwindet.*

Oben sahen wir, dass das Gravitationsfeld eines Massenpunktes ein konservatives Vektorfeld ist, dagegen das im Beispiel 12.6 gegebene Magnetfeld nichtkonservativ ist.

**THEOREM 12.3** *Ein Vektorfeld $v$ ist auf $\Omega$ genau dann konservativ, wenn es eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $U : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$v = \nabla U = \operatorname{grad} U.$$

*In diesem Fall ist das Kurvenintegral über eine Kurve $C$ vom Punkt $P_1$ nach $P_2$ gegeben durch*

$$\int_C v \cdot dx = U(P_2) - U(P_1),$$

*$U$ heißt Potential von $v$.*

**Beweis.** Wir zeigen, dass jedes Gradientenfeld konservativ ist. Für jede $\mathcal{C}^1$-Kurve $C$ mit der Parametrisierung $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ in $\Omega$ gilt

$$\frac{d}{dt} U(\alpha(t)) = \operatorname{grad} U(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = v(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t).$$

Das Kurvenintegral über $C$ ist dann

$$\int_C v \cdot dx = \int_a^b v(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\alpha(t))\, dt = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)).$$

Für eine stückweis glatte Kurve $C = C_1 + \cdots + C_N$ mit den Eckpunkten $P_i$, $i = 0, \ldots, N$, folgt

$$\int_C v \cdot dx = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} v \cdot dx = \sum_{i=1}^N (U(P_i) - U(P_{i-1})) = U(P_N) - U(P_0):$$

Sei nun $v$ ein konservatives Vektorfeld. Da das Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, können wir einfacher

$$\int_C v \cdot dx = \int_{x_0}^x v \cdot dx$$

schreiben, wenn die Kurve von $x_0$ nach $x$ verläuft. Wir setzen

$$U(x) := \int_{x_0}^{x} v \cdot dx$$

und zeigen, dass $U$ partiell differenzierbar mit grad $U = v$ ist. Ist $x \in \Omega$, so gibt es eine Umgebung von $x$, die ganz in $\Omega$ verläuft. Für hinreichend kleine $h \in \mathbb{R}$ ist dann auch $x + he_j$ mit dem $j$-ten Koordinateneinheitsvektor in dieser Umgebung. Wegen der Wegunabhängigkeit ist

$$U(x + he_j) - U(x) = \int_{x}^{x+he_j} = \int_0^h v(x + te_j) \cdot e_j \, dt = \int_0^h v_j(x + te_j) \, dt$$

Differentiation nach $h$ liefert

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}(x + he_j) = v_j(x + he_j),$$

woraus durch Grenzübergang $h \to 0$ die Behauptung folgt. ♣

Zur Formulierung hinreichender Kriterien für die Existenz von Potentialen benötigen wir einigen Begriffe zur Charakterisierung von Gebieten.

**DEFINITION 12.13** *Ein Gebiet (offene und zusammenhängende Menge) heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ gibt, so dass mit jedem Punkt $x \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke zwischen $x_0$ und $x$ in $\Omega$ liegt. Anschaulich bedeutet dies, dass man vom Zentrum $x_0$ aus jeden Punkt $x \in \Omega$ 'sehen' kann. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heißt einfach, wenn es das $C^2$-diffeomorphe Bild eines sternförmigen Gebietes ist.*

Anschaulich entsteht ein einfaches Gebiet also durch 'Verbiegen' eines sternförmigen Gebietes. So ist der geschlitzte Kreisring

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_1 < \sqrt{x^2 + y^2} < R_2\} \backslash \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$$

ein einfaches Gebiet. Der $C^2$ Diffeomorphismus wird durch die Transformation $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, mit $(r, \phi) \in (R_1, R_2) \times (0, 2\pi)$ definiert.

Für $\mathcal{C}^1$-Vektorfelder findet man durch Anwendung des Satzes von H.A. Schwarz die folgenden notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Potentials.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

**DEFINITION 12.14** *Ein $C^1$-Vektorfeld heißt rotationsfrei, wenn*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}, \quad i,k = 1,\dots,d$$

*gilt. Mit dem Rotor*

$$\operatorname{rot} v := (\nabla \times v) = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

*kann ein rotationsfreies Vektorfeld $v$ im $\mathbb{R}^3$ auch kurz in der Form* rot $v = 0$ *geschrieben werden.*

Beispiel 12.6 zeigt, daß die Rotationsfreiheit nur eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials und damit der Wegunabhängigkeit des vektoriellen Kurvenintegrals ist.

**THEOREM 12.4** *(Hinreichende Bedingung für Existenz von Potentialen) Das $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld $v$ sei auf dem einfachen Gebiet $\Omega$ rotationsfrei. Dann gibt es auf $\Omega$ ein Potential $U$ mit $v = \operatorname{grad} U$.*

**Beweis.** Sei zunächst $\Omega$ sternförmig. Vom Zentrum $x_0 \in \Omega$ können wir alle Punkte $x \in \Omega$ sehen. Setzen wir

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} v \cdot dx,$$

so kann $U(x)$ auch als Kurvenintegral entlang der Verbindungsgeraden, die durch $\alpha(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $t \in [0,1]$ parametrisiert wird, berechnet werden.

$$U(x) = \int_0^1 v(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{d} v_i(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_{0i})\, dt.$$

Differentiation des Parameterintegrals ergibt

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x_0 + t(x - x_0))\, t(x_i - x_{0i})\, dt + \int_0^1 v_k((x_0 + t(x - x_0))\, dt.$$

Partielle Integration des zweiten Integrals beinhaltet

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_k((x_0 + t(x - x_0))\, dt &= t v_k(x_0 + t(x - x_0))\Big|_0^1 - \int_0^1 t \frac{d}{dt}\left(v_k(x_0 + t(x - x_0))\right)\, dt \\ &= v_k(x) - \int_0^1 t \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x_0 + t(x - x_0)(x_i - x_{0i})\, dt \end{aligned}$$

woraus unter Berücksichtigung der Rotationsfreiheit von $v$ die Behauptung grad $U(x) = v(x)$ folgt.

Sei nun $\Omega$ einfach, d.h. das Bild eines sternförmigen Gebietes $\Omega_0$ bezüglich eines $C^2$-Diffeomorphismus $\phi : \Omega_0 \to \Omega$. Dann ist

$$w = \sum_{l=1}^{d} (v \circ \phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_l} e_l$$

auf dem Gebiet $\Omega_0$ rotationsfrei. In der Tat folgen für

$$w_i(y) = \sum_{m=1}^{d} v_m(\phi(y)) \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i} \quad w_k(y) = \sum_{m=1}^{d} v_m(\phi(y)) \frac{\partial \phi_m}{\partial y_k}$$

aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_i}{\partial y_k} &= \sum_{m,n=1}^{d} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial y_k} \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i} + \sum_{m=1}^{d} v_m(\phi(y)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_k \partial y_i} \\
\frac{\partial w_k}{\partial y_i} &= \sum_{m,n=1}^{d} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial y_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial y_k} + \sum_{m=1}^{d} v_m(\phi(y)) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_k}.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Vertauschbarkeit der gemischten partiellen Ableitungen für $\phi$ sowie die Rotationsfreiheit von $v$, erhält man

$$\frac{\partial w_i}{\partial y_k} = \frac{\partial w_k}{\partial y_i}.$$

Damit hat das Vektorfeld $w$ auf dem sternförmigen Gebiet $\Omega_0$ ein Potential $W$. Wir zeigen, dass

$$U = W \circ \phi^{-1}$$

ein Potential für $v$ ist. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \sum_{m=1}^{d} \frac{\partial W}{\partial y_m}(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial \phi^{-1}(x)}{\partial x_k} = \sum_{m=1}^{d} w_m(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial \phi^{-1}(x)}{\partial x_k}$$

und wegen

$$w_m(y) = \sum_{n=1}^{d} v_n(\phi(y)) \frac{\partial \phi_n(y)}{\partial y_m}$$

folgt

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \sum_{m,n=1}^{d} v_n(x) \frac{\partial \phi_n}{\partial y_m}(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial \phi_m^{-1}(x)}{\partial x_k}.$$

Die Differentiation der Identität $x = \phi(\phi^{-1}(x))$ zeigt, dass

$$\delta_{nk} = \sum_{m=1}^{d} \frac{\phi_n}{\partial y_m}(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial \phi_m^{-1}(x)}{\partial x_k}$$

ist, woraus durch Einsetzen die Behauptung folgt. ♣

**BEISPIEL 12.7** *Wir zeigen, dass*

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy}\sin z + x + y \\ xe^{xy}\sin z + x + y - z \\ e^{xy}\cos z - y + z \end{pmatrix}$$

*ein konservatives Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^3$ ist. Ferner bestimmen wir ein Potential von $v$. Man erhält durch Differenzieren von*

$$\begin{aligned} P &= ye^{xy}\sin z + x + y \\ Q &= xe^{xy}\sin z + x + y - z \\ R &= e^{xy}\cos z - y + z \end{aligned}$$

*die Beziehungen*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

*also ist $v$ rotationsfrei. Das zu bestimmende Potential $U$ genügt*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P = ye^{xy}\sin z + x + y,$$

*so dass*

$$U(x,y,z) = e^{xy}\sin z + \frac{x^2}{2} + xy + \lambda(y,z)$$

*mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\lambda$ gelten muss. Partielle Differentiation nach $y$ und Vergleich mit $Q$ ergibt die Forderung*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = y - z,$$

*aus der die Darstellung*

$$\lambda(y,z) = \frac{y^2}{2} - yz + \mu(z)$$

*mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\mu$ resultiert. Differenziert man nun*

$$U(x,y,z) = e^{xy}\sin z + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} - yz + \mu(z)$$

*partiell nach $z$ und vergleicht mit $R$, so erhält man*

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = z,$$

*oder bis auf einen additiven konstanten Summanden $\mu = z^2/2$. Das Potential ist damit bis auf eine additive Konstante durch*

$$U(x, y, z) = e^{xy} \sin z + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} - yz + \frac{z^2}{2}$$

*gegeben.*

# 13 Integralrechnung im $\mathbb{R}^d$

## 13.1 Integral für Treppenfunktionen

Im Folgenden betrachten wir beschränkte, abgeschlossene Intervalle $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, d$.

**DEFINITION 13.1** *Das direkte Produkt $I := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ mit $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, d$ heißt d-dimensionaler Quader. Die Zahl*

$$V(I) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

*heißt Volumen des Quaders. Ein Quader heißt entartet, falls $a_i = b_i$ für ein $i = \{1, \ldots, d\}$ gilt oder gleichbedeutend, wenn $V(I) = 0$.*

Eine wesentliche Eigenschaft des Volumens eines Quaders ist die Translationsinvarianz, d.h. $V(I + c) = V(I)$ für jeden Translationsvektor $c = (c_1, \ldots, c_d)$. Sie folgt einfach wegen

$$I + c = [a_1 + c_1, b_1 + c_1] \times \ldots \times [a_d + c_d, b_d + c_d] \quad .$$

**DEFINITION 13.2** *Seien $I_1, \ldots, I_N \subset \mathbb{R}^d$ kompakte Quader. Dann gibt es kompakte Quader $J_1, \ldots, J_M \subset \mathbb{R}^d$ mit paarweise disjunktem Inneren, so dass jedes $I_i$ als Vereinigung geeigneter $J_k$ dargestellt werden kann und*

$$\overset{\circ}{J}_i \cap \overset{\circ}{J}_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \text{ und } \bigcup_{i=1}^{N} I_i = \bigcup_{j=1}^{M} J_j \quad .$$

*$J_1, \ldots, J_M$ heißt Rasterung der $I_1, \ldots, I_N$.*

*In Abbildung 5 sind zwei Zerlegungen der Vereinigung zweier kompakter Quader in $\mathbb{R}^2$ in Mengen $J_j$ mit paarweise disjunkten Innerem dargestellt, deren Vereinigung $\bigcup_j J_j = I_1 \cup I_2$ ist. Nur eine der Zerlegungen stellt eine Rasterung dar.*

**DEFINITION 13.3** *Sei $I \subset \mathbb{R}^d$ die Vereinigung kompakter Quader $I_i, i = 1, \ldots, N$. Ferner sei $\chi_{I_i}$ die charakteristische Funktion der Menge $I_i$, also*

$$\chi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in I_i \\ 0 & \text{für} \quad x \notin I_i \end{cases} \quad .$$

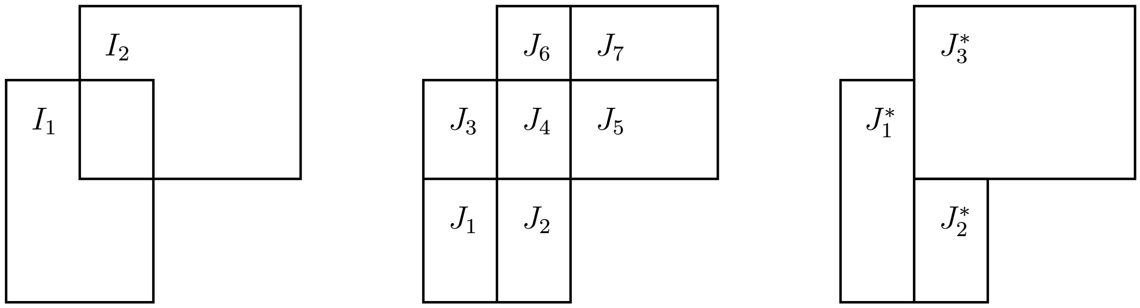



Abbildung 5: Kompakte Quader $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^2$ und eine Rasterung $J_1, \ldots, J_6$ von $I_1, I_2$. Beachte, dass $J_1^*, J_2^*, J_3^*$ keine Rasterung von $I_1, I_2$ ist.

*Dann heißt $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $(c_1 \ldots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ und*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{I_i}(x)$$

*Treppenfunktion auf $I$. Ist das Innere der $I_i$ paarweise durchschnittsfremd, heißt die Darstellung von $\varphi$ disjunkt.*

**DEFINITION 13.4** *Zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi$ heißen fast überall gleich, wenn sie sich höchstens auf Quaderrändern jeder zulässigen Rasterung von $I = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ unterscheiden.*

Offensichtlich gibt es für jede Treppenfunktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine disjunkte Darstellung in der Form

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{M} d_j \chi_{J_j}(x) \qquad \text{für fast alle } x \in I$$

wobei $J_1, \ldots, J_M$ eine Rasterung von $I$ ist.

**LEMMA 13.1** *Zu je zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ gibt es eine Rasterung $J_1, \ldots, J_M$ von $I$, so dass mit geeigneten $(c_1, \ldots, c_M), (d_1, \ldots, d_M)$*

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j \chi_{J_j}(x), \qquad \psi(x) = \sum_{j=1}^{M} d_j \chi_{J_j}(x) \qquad \textit{für fast alle } x \in I$$

*gilt.*

**DEFINITION 13.5** *Sei $\varphi$ eine Treppenfunktion auf $I$ in disjunkter Darstellung $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Wir definieren*

$$\int_I \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^{N} c_k V(I_k) \quad .$$

**Beachte:** $\int_I \varphi(x)dx$ hängt nicht von der speziellen disjunkten Darstellung ab. Für jeden Quader $J \subset I$ gilt

$$\int_J \varphi(x)dx = \int_I \varphi(x)\chi_J(x)dx \quad .$$

Im $\mathbb{R}^2$ stellt ein kompakter Quader $I_k$ ein Rechteck dar und das Volumen $V(I_k)$ die Rechteckfläche. Das Integral über eine Treppenfunktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist dann als Volumen des aus Quadern $I_k \times [0, c_k] (c_k > 0)$ zusammengesetzten Körpers interpretierbar (vgl. Abb. 6).

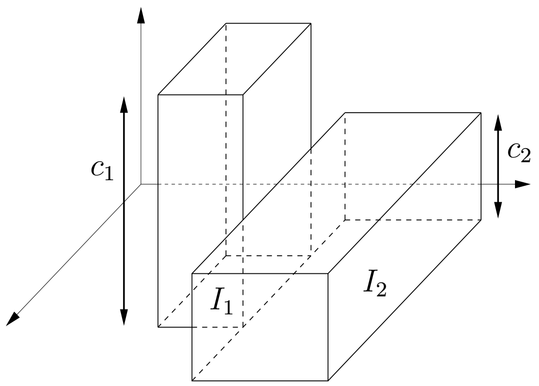



Abbildung 6: Integral einer Treppenfunktion im $\mathbb{R}^2$ als Volumen zusammengesetzter Quader

Wir stellen nun einige leicht überprüfbare Eigenschaften des Integrals zusammen:

**Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen auf der Vereinigung kompakter Quader**

1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\varphi, \psi$ Treppenfunktion über der Vereinigung $I$ kompakter Quader. Dann gilt

$$\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi)\, dx = \alpha \int_I \varphi\, dx + \beta \int_I \psi\, dx \qquad \text{(Linearität).}$$

2. Aus $\varphi(x) \geq 0$ für fast alle $x \in I$ folgt

$$\int_I \varphi\, dx \geq 0 \qquad \text{(Positivität).}$$

3. Aus $\varphi(x) = \psi(x)$ für fast alle $x \in I$ folgt

$$\int_I \varphi\, dx = \int_I \psi\, dx.$$

4. Gilt $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für fast alle $x \in I$, so folgt
$$\int_I \varphi\, dx \leq \int_I \psi\, dx \qquad \text{(Monotonieeigenschaft).}$$

5. $$\left| \int_I \varphi(x) dx \right| \leq \|\varphi\|\, V(I) \qquad \text{(Stetigkeit).}$$

Im Spezialfall von kompakten Quadern kann die Integration in höherdimensionalen Räumen auf die Integration in niederdimensionalen Räumen zurückgeführt werden. Dazu seien $I \subset \mathbb{R}^p$ und $J \subset \mathbb{R}^q$ kompakte Quader. Jeder Vektor $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ werde in der Form $z = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) = (x, y)$ geschrieben.

**THEOREM 13.1** *(Sukzessive Integration)*
*Für jede Treppenfunktion $\varphi$ auf $I \times J$ gilt:*

*a) Für jedes feste $x \in I$ ist $y \mapsto \varphi(x, y)$ eine Treppenfunktion auf $J$.*

*b) $x \mapsto \psi(x) = \int_J \varphi(x, y) dy$ ist eine Treppenfunktion auf $I$.*

*c) $\int_{I \times J} \varphi(z) dz = \int_I \psi(x) dx = \int_I \left( \int_J \varphi(x, y) dy \right) dx$.*

**Beweis.** Die Treppenfunktion $\varphi : I \times J \to \mathbb{R}$ besitzt eine disjunkte Darstellung, die auf einer Rasterung von $I \times J$ in $\mathbb{R}^{p+q}$ basiert. Die Projektionen der entsprechenden Quader auf den $\mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^q$ bilden eine Rasterung von $I$ bzw. $J$. Dann ist $I = \bigcup_{i=1}^{M} I_i$; $J = \bigcup_{j=1}^{N} J_j$ und
$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \chi_{I_i \times J_j}(x, y)$$
fast überall. Wegen $\chi_{I_i \times J_j}(x, y) = \chi_{I_i}(x) \cdot \chi_{J_j}(y)$ und $V(I_i \times J_j) = V(I_i) \cdot V(J_j)$ folgt
$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{N} \left( \sum_{i=1}^{M} a_{ij} \chi_{I_i}(x) \right) \chi_{J_j}(y)$$
woraus a) folgt.
$$\int_J \varphi(x, y) dy = \sum_{j=1}^{N} \left( \sum_{i=1}^{M} a_{ij} \chi_{I_i}(x) \right) V(J_j) = \sum_{i=1}^{M} \left( \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V(J_j) \right) \chi_{I_i}(x)$$
woraus b) folgt.
$$\int_I \left( \int_J \varphi(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=1}^{M} \left( \sum_{j=1}^{N} a_{ij} V(J_j) \right) V(I_i) = \int_{I \times J} \varphi(z) dz$$

woraus c) folgt. ♣

**THEOREM 13.2** *(Additivität des Integrals)*
*Für jede Zerlegung eines Quaders* $I = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ *mit* $\mathring{I}_i \cap \mathring{J}_j = \emptyset$ *bei* $j \neq i$ *gilt*

$$\int_I \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} \varphi(x)dx \quad .$$

## 13.2 Integration stetiger Funktionen über kompakte Quader

Grundlegend für die Erweiterung des Integralbegriffes von Treppenfunktionen auf die Klasse der stetigen Funktionen ist die Möglichkeit, stetige Funktionen als gleichmäßigen Grenzwert von Treppenfunktionen zu approximieren. Die Technik der Erweiterung ermöglicht nicht nur die Erweiterung auf stetige Funktionen sondern auf die Klassen aller Funktionen, die sich als gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen ergeben.

**THEOREM 13.3** *Ist* $f$ *auf dem kompakten Quader* $I$ *stetig, so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Treppenfunktion* $\varphi$ *auf* $I$ *mit* $\|f - \varphi\| < \varepsilon$, *wobei* $\|\Phi\| = \sup_{x \in I} |\Phi(x)|$ *gilt.*

**Beweis.** Zur besseren Veranschaulichung führen wir den Beweis im Fall $d = 2$. Die Funktion $f$ ist laut Voraussetzung stetig und somit ist $f$ auf $I$ gleichmäßig stetig. Somit gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir setzen $h_1 := (b_1 - a_1)/N$ und $h_2 := (b_2 - a_2)/N$. Wenn $N$ hinreichend groß ist, dann gilt $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta(\varepsilon)$. Wir definieren nun die Treppenfunktion (vgl. Abb. 7).

$$\varphi_N(x,y) = \begin{cases} f(a_1 + ih_1, a_2 + jh_2) & \text{falls} & \begin{array}{c} a_1 + ih_1 \leq x < a_1 + (i+1)h_1 \\ a_2 + jh_2 \leq y < a_2 + (j+1)h_2 \end{array} \\ f(a_1 + ih_1, h_2) & \text{falls} & y = b_2,\ a_1 + ih_1 \leq x < a_1 + (i+1)h_1 \\ f(b_1, a_2 + jh_2) & \text{falls} & x = b_1,\ a_2 + jh_2 \leq y < a_2 + (j+1)h_2 \\ f(b_1, b_2) & \text{falls} & x = b_1,\ y = b_2 \end{cases} \quad .$$

Dann gilt $\|f - \varphi_N\| < \varepsilon$. ♣

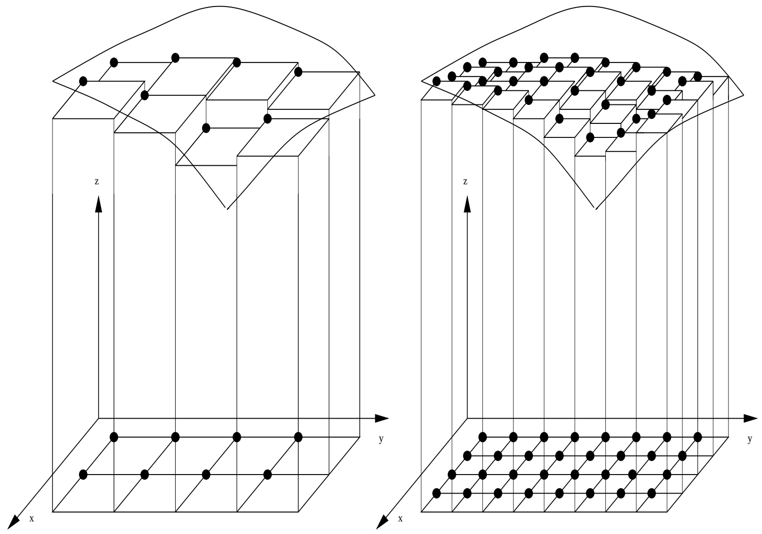



Abbildung 7: Gleichmäßige Approximation einer stetigen Funktion durch eine Folge von Treppenfunktionen.

**KOROLLAR 13.1** *Zu jeder auf dem kompakten Quader $I$ stetigen Funktion $f$ gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_n$, die gleichmäßig auf $I$ gegen $f$ konvergiert.*

**Beweis.** Zu $\varepsilon = 1/n$ exitiert ein $\varphi_n$ mit $\|f - \varphi_n\| < 1/n$. ♣

**DEFINITION 13.6** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Grenzwert einer Folge gleichmäßig auf $I$ konvergierender Treppenfunktionen $\varphi_n$. Wir definieren*

$$\int_I f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(x)\,dx \quad .$$

Damit die Definition Sinn macht, ist einerseits die Existenz des Grenzwertes der Zahlenfolge

$$\left(\int_I \varphi_n(x)\,dx\right)_{n\geq 1}$$

und andererseits die Unabhängigkeit des Grenzwertes von der Auswahl der $f$ approximierenden Folge von Treppenfunktionen zu sichern.

**Existenz des Grenzwertes:**
Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ gegen $f$ haben wir zunächst

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o(\varepsilon) : \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| = \|\varphi_n - f + f - \varphi_m\| \le \|f - \varphi_n\| + \|f - \varphi_m\| < 2\varepsilon\,.$$

Linearität und Stetigkeit des Integrals über Treppenfunktionen ergibt

$$\begin{aligned}
\left|\int_I \varphi_n(x)dx - \int_I \varphi_m(x)dx\right| &= \left|\int_I (\varphi_n - \varphi_m)(x)dx\right| \\
&\le ||\varphi_n - \varphi_m|| \quad V(I) \\
&< 2\varepsilon V(I) < \varepsilon^\star \quad .
\end{aligned}$$

Also ist die Zahlenfolge

$$\left(\int_I \varphi_n(x)dx\right)_{n\ge 1}$$

Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent.

**Unabhängigkeit des Grenzwertes von der approximierenden Folge:**
Seien $(\varphi_n)_{n\ge1}$ und $(\psi)_{n\ge1}$ zwei die Funktion $f$ auf $I$ gleichmäßig approximierende Folgen von Treppenfunktionen. Wir betrachten

$$\|\varphi_n - \psi_n\| \le \|\varphi_n - f\| + \|f - \psi_n\| < 2\varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)\,.$$

Daraus folgt

$$\left|\int_I \varphi_n(x)\,dx - \int_I \psi_n(x)\,dx\right| = \left|\int_I (\varphi_n - \psi_n)(x)\,dx\right| \le V(I)\|\varphi_n - \psi_n\| < 2\varepsilon V(I)\,,$$

so dass die Differenz der Approximationen für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Die Zahlenfolgen

$$\left(\int_I \varphi_n(x)dx\right)_{n\ge 1} \qquad \left(\int_I \psi_n(x)dx\right)_{n\ge 1}$$

konvergieren somit gegen den gleichen Grenzwert. ♣

Übliche Schreibweisen für $d = 2, 3$ sind

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dydx = \int_I f(z)\,dz \qquad I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

sowie

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dzdydx = \int_I f(z)\,dzI = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$

Einige Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen lassen sich auf den Fall von stetigen Integranden übertragen.

**Eigenschaften des Integrals über stetigen Funktionen:**

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $f, g \in \mathbb{C}(I)$. Dann gilt

$$\int_I (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_I f(x)\, dx + \beta \int_I g(x)\, dx \quad \text{(Linearität)} \quad .$$

(b) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so gilt

$$\int_I f(x)\, dx \leq \int_I g(x)\, dx \quad \text{(Monotonieeigenschaft)} \quad .$$

(c) (Stetigkeitseigenschaft)

$$\left| \int_I f(x)\, dx \right| \leq \int_I |f(x)|\, dx \leq \|f\| V(I)\, .$$

(d) (Definitheit)

$$\int_I |f(x)| dx = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I\, .$$

**THEOREM 13.4** *(Parameterintegrale)*
*Sei $I$ ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^d$ und $J$ ein reelles Intervall. Dann gilt:*

*(a) Ist $f : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig, so ist*

$$t \mapsto F(t) := \int_I f(x,t)\, dx$$

*stetig in $J$.*

*(b) Existiert zusätzlich*

$$\frac{\partial f}{\partial t} : I \times J \to \mathbb{R}$$

*und ist diese Funktion stetig, dann ist $F$ eine $C^1$-Funktion auf $J$ und es gilt*

$$F'(t) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx.$$

**Beweis.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $J$ als kompakt voraussetzen.

(a) $f$ ist auf $I \times J$ gleichmäßig stetig, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$,

$$\forall x \in I, s, t \in J \quad \text{mit } |t-s| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x,s) - f(x,t)| < \varepsilon\,.$$

Für $|t-s| < \delta$ gilt also

$$\begin{aligned} |F(s) - F(t)| &= \left| \int_I (f(x,s) - f(x,t)) dx \right| \\ &\leq \int_I \underbrace{|f(x,s) - f(x,t)|}_{<\varepsilon} dx < \varepsilon V(I)\,. \end{aligned}$$

Also ist $F(t)$ sogar gleichmäßig stetig auf $J$.

(b) Wir fixieren $t \in J$ und betrachten:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(s) - F(t)}{s-t} - \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \right| &= \left| \int_I \frac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \right| \\ &\leq \int_I \left| \frac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| dx \quad . \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz liefert

$$\frac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} = \frac{\partial f}{\partial t}\,(x, t + \vartheta(s-t)) \qquad \vartheta \in (0,1)$$

und mit der gleichmäßigen Stetigkeit von $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ auf $I \times J$ folgt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}\,(x, t + \vartheta(s-t)) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| < \varepsilon$$

für alle $s, t$ mit $|s-t| < \delta(\varepsilon)$. Daraus folgt

$$\left| \frac{F(s) - F(t)}{s-t} - \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx \right| \leq \varepsilon V(I) \quad .$$

Gehen wir zum Grenzwert $s \to t$ über, so folgt die Behauptung. ♣

**THEOREM 13.5** *(Sukzessive Integration)*

*(a) Für eine auf einem Rechteck $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ stetige Funktion $f$ gilt:*

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy dx = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$

*Dabei sind $x \mapsto F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy$ und $y \mapsto F(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx$ stetige Funktionen auf $[a_1, b_1]$ bzw. $[a_2, b_2]$.*

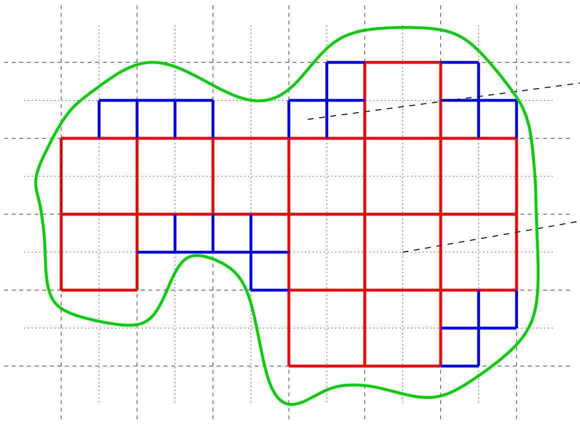



Abbildung 8: Quaderzerlegung offener Mengen

*(b) Für einen Quader $I \times J$ und die auf $I \times J$ stetige Funktion $f$ gilt:*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,dxdy = \int_I \left( \int_J f(x,y)\,dy \right) dx = \int_J \left( \int_I f(x,y)\,dx \right) dy$$

*wobei $I \subset \mathbb{R}^p$ und $J \in \mathbb{R}^q$ kompakte Quader sind.*

**Beweis.** Ausnutzung der Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch Treppenfunktionen

## 13.3 Integral von stetigen Funktionen über offenen Mengen

**THEOREM 13.6 (Quaderzerlegung offener Mengen)** *Seien $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\Omega$ offen. Dann existiert eine Folge kompakter Quader $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ mit paarweise disjunktem Innern, d.h. $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_k = \emptyset\ \forall j,k : j \neq k$, so dass*

*(i)* $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty I_j$,

*(ii) jede kompakte Teilmenge von $\Omega$ bereits durch endlich viele dieser Quader überdeckt wird.*

**Beweis.**

(i) Zur Vereinfachung der Darstellung betrachten wir nur den Fall $d = 2$. Wir überziehen $\mathbb{R}^2$ mit einem Netz von Quadraten. Dabei ist das Netz 0-ter Stufe durch die Gitterlinien $x = k$, $y = l$, $k,l \in \mathbb{Z}$ definiert. Das Netz 1-ter Stufe hat die Gitterlinien $x = k/2$, $y = l/2$, $k,l \in \mathbb{Z}$, das Netz 2-ter Stufe die Gitterlinien $x = k/2^2$, $y = l/2^2$, $k, l \in \mathbb{Z}$, allgemein das Netz $m$-ter Stufe die Gitterlinien $x = k/2^m$, $y = l/2^m$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Wir bezeichnen durch $K_0$ die Vereinigung aller kompakten Gitterzellen der 0-ten Stufe, die in $\Omega$ enthalten sind. Weiter sei $K_1$ die Vereinigung aller kompakten Gitterzellen der 1-ten Stufe, die in $\Omega$ aber nicht in $K_0$ enthalten sind, allgemein sei $K_i$, $i \in \mathbb{N}$, die Vereinigung aller kompakten Gitterzellen der $i$-ten Stufe, die in $\Omega$ aber nicht in der Vereinigung der $K_j$, $j = 0, \ldots, i-1$, enthalten sind (vgl. Abb. 8). Nach Konstruktion gilt dann

$$\Omega \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j.$$

Sei nun $x_0 \in \Omega$ beliebig, aber fest. Da $\Omega$ offen ist, gibt es eine Kugel $K(x_0, r) \subset \Omega$. Wir betrachten das Quadrat $m$-ter Stufe, das $x_0$ enthält (im Fall, dass $x_0$ zu mehreren Quadraten $m$-ter Stufe gehört, wählen wir ein beliebiges dieser Quadrate). Für hinreichedn großes $m$ ist $2^{-m}\sqrt{2} < r$ und damit das Quadrat vollständig in $K(x_0, r)$ enthalten. Somit finden wir zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein $m = m(x_0)$ mit

$$x_0 \in \bigcup_{i=0}^{m(x_0)} K_i \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i.$$

Dies bedeutet, dass $\Omega$ Teilmenge der Vereinigung aller $K_i$, $i = 0, 1, \ldots$ ist. Zusammen mit der Konstruktion der $K_i$ bedeutet dies, dass

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i.$$

Die Vereinigung der $K_i$'s enthält abzählbar viele Quadrate $I_k$ (kompakte Quader), denn

- die linken unteren Ecken der Quadrate haben rationale Koordinaten und
- die Vereinigung nur endlich vieler kompakter Quader $I_k$ wäre kompakt und nicht offen.

Dies beweist die erste Behauptung des Satzes.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$, $K \subset \Omega$ und $K$-kompakt. In diesem Fall überdecken bereits die endlich vielen Gitterzellen der nullten Stufe, die mit $K$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, $K$. Betrachten wir nun den Fall, dass $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Dann gibt es Randpunkte von $\Omega$. Sei $r = \text{dist}\ (K, \partial\Omega)/2$ der halbe Abstand von $K$ zum Rand $\partial\Omega$. Dann ist die Kugel $K(x, r)$ für alle $x \in K$ in $\Omega$ enthalten und bis zur Stufe $m$, wobei $2^{-m}\sqrt{2} < r$, ist $K$ vollständig durch Gitterzellen überdeckt. ♣

**DEFINITION 13.7** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Die Abbildung $f$ heißt über $\Omega$ integrierbar, wenn es eine Zahl $M \geq 0$ gibt, so dass*

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} |f(x)|\, dx \leq M$$

*für je endlich viele kompakte Quader $I_1, \ldots, I_N$ in $\Omega$ mit paarweise disjunktem Inneren gibt. Für integrierbare Abbildungen $f$ ist das Integral durch*

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f(x)\, dx$$

*definiert, wobei $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Quaderzerlegung von $\Omega$ ist.*

**BEMERKUNG 13.1** *(i) Die Reihe ist absolut konvergent. Der Reihenwert ist unabhängig von der gewählten Quaderzerlegung von $\Omega$.*

*(ii) Ist $f$ auf der Vereinigung kompakter Quader $I$ stetig, so ist $f$ auch über das Innere von $I$ also $\Omega := \overset{\circ}{I}$ im Sinne der obiger Definition integrierbar und es gilt*

$$\int_{\overset{\circ}{I}} f(x)\, dx = \int_{I} f(x)\, dx.$$

**Eigenschaften des Integrals integrierbarer Abbildungen über offenen Mengen :**

1. Integrierbarkeit und Linearität
   Sind $f$ und $g$ integrierbar über $\Omega$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar über $\Omega$ . Ferner gilt:

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_{\Omega} f\, dx + \beta \int_{\Omega} g\, dx.$$

2. Monotonie
   Sind $f$ und $g$ integrierbar über $\Omega$ mit $f \leq g$ fast überall in $\Omega$, so gilt

$$\int_{\Omega} f\, dx \leq \int_{\Omega} g\, dx.$$

3. Integrierbarkeit und Integralabschätzung
   Die Abbildung $f$ ist integrierbar über $\Omega$ genau dann, wenn die Abbildung $|f|$ integrierbar über $\Omega$ ist. Es gilt die Abschätzung:

$$\left| \int_{\Omega} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)|\, dx.$$

4. Majorantensatz
   Besitzt die stetige Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Majorante, so ist $f$ über $\Omega$ integrierbar.
5. Zerlegung in den positiven und negativen Anteil
   Die stetige Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar über $\Omega$, wenn der positive und negative Anteil von $f$, d.h.
   $$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \qquad \text{und} \qquad f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$
   über $\Omega$ integrierbar sind. Insbesondere gilt
   $$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f_+(x)\,dx - \int_\Omega f_-(x)\,dx.$$

**Beweis.** Definition und Eigenschaften des Integrals stetiger Funktionen über kompakte Quader. ♣

**THEOREM 13.7 (Integrierbarkeit)** *Jede auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega$ beschränkte, stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist über $\Omega$ integrierbar.*

**Beweis.** Folgerung aus dem Majorantensatz. ♣

**THEOREM 13.8 (Allgemeiner Satz über sukzessive Integration)** *Seien $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, $g$, $h : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) < h(x)$ für alle $x \in \Omega_0$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig auf*

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : g(x) < y < h(x),\ x \in \Omega_0\}.$$

*Für alle kompakten Teilmengen $I \subset \Omega_0$ existiere eine Konstante $C_I$, so dass*

$$|f(x, y)| \leq C_I\ \forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) < y < h(x),\ x \in I\}.$$

*Dann sind*

$$F(x) := \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy, \qquad G(x) := \int\limits_{g(x)}^{h(x)} |f(x, y)|\,dy$$

*auf $\Omega_0$ stetig. Ist $G$ über $\Omega_0$ integrierbar, so ist auch $f$ über $\Omega$ integrierbar und es gilt mit der Bezeichnung $z = (x, y)$*

$$\int_\Omega f(z)\,dz = \int_{\Omega_0} F(x)\,dx = \int_{\Omega_0} \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dydx.$$

## Das $d$-dimensionale Volumen offener Mengen

Im folgenden definieren wir für offene Mengen das $d$-dimensionale Volumen und zeigen, dass beschränkte offene Mengen ein endliches Volumen besitzen. Sei $\Omega$ eine offene Menge und $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ eine Zerlegung in kompakte Quader. Dann setzen wir

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} 1\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} V(I_k)$$

falls die Reihe konvergiert, andernfalls $V(\Omega) = \infty$. Beschränkte offene Mengen haben somit ein endliches Volumen.

## 13.4 Der Transformationssatz

Im eindimensionalen Fall und stetigem Integranden kann zur Transformation die Substitutionsregel

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy = \int\limits_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\, dx \qquad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

herangezogen werden. Der Transformationssatz verallgemeinert diese Regel auf beliebige Raumdimensionen.

**THEOREM 13.9 (Transformationssatz)** *Seien $\Omega$ und $\Omega'$ offene Mengen im $\mathbb{R}^d$, $g : \Omega \to \Omega'$ ein $C^1$-Diffeomorphismus. Dann ist die stetige Funktion $f$ auf $\Omega' = g(\Omega)$ genau dann über $\Omega'$ integrierbar, wenn $(f \circ g) \cdot |\det g'|$ über $\Omega$ integrierbar ist. Darüber hinaus gilt*

$$\int_{\Omega'} f(y)\, dy = \int_{\Omega} f(g(x))|\det\, g'(x)|\, dx.$$

**Beweis.** Siehe Abschnitt 9.2 in Königsberger, K.: *Analysis 2*, Springer 1999, S. 293-298. ♣

Der Transformationssatz findet häufig Anwendung bei der Transformation auf neue Koordinatensysteme, z.B. Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten. Das Ziel einer solchen Koordinatentransformation ist es, das Gebiet oder/und den Integranden zu vereinfachen, so dass die Berechnung des mehrfachen Integrals vereinfacht wird.

**Polarkoordinaten**

Polarkoordinaten beschreiben die Lage eines Punktes $(y_1, y_2) = (x, y)$ durch die Angabe von $(x_1, x_2) = (r, \varphi)$, wobei die Abbildung $g$ gegeben ist durch

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r > 0,\ \varphi \in (-\pi, +\pi)$$

(vgl. Abb. 9). Der Winkelbereich kann auch durch andere $2\pi$ lange Intervalle, etwa $(0, 2\pi)$ ersetzt werden. Der Betrag der Determinate der Jacobi-Matrix berechnet sich zu $|\det g'| = r$.

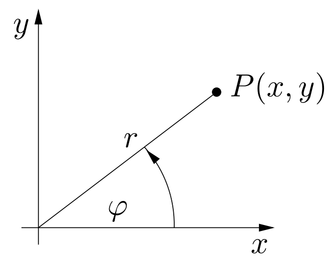



Abbildung 9: Polarkoordinaten.

**BEISPIEL 13.1** *Gesucht sei das Integral von $f(x, y) = x + 3y$ über den Einheitskreis. Das Integral ist gleich dem Integral über den geschlitzten Einheitskreis $\Omega' = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 < 1, \}\backslash\{(x, 0)\ :\ x \in (-1, 0]\}$, der das Bild des (offenen) Rechteckgebietes $\Omega = \{(r, \varphi)\ :\ r \in (0, 1),\ \varphi \in (-\pi, +\pi)\}$ ist (vgl. Abb. 10). Somit gilt*

$$\int_{\Omega'} (x + 3y)\, dxdy = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (r\cos\varphi + 3r\sin\varphi) \cdot r\, d\varphi dr = 0.$$

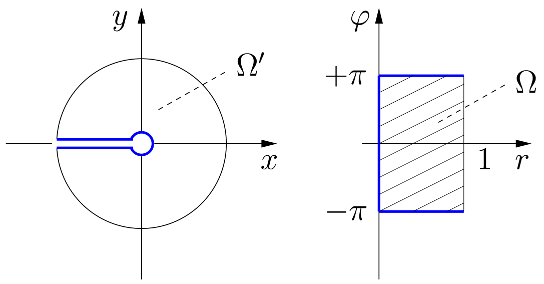



Abbildung 10: Geschlitzter Einheitskreis $\Omega'$ (links) als Bild des in Polarkoordinaten gegebenen Rechtecks $\Omega$ (rechts).

### Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten beschreiben die Lage eines Punktes $(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$ durch die Angabe von $(x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, z)$, wobei die Abbildung $g$ gegeben ist durch

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z, \qquad r > 0,\ \varphi \in (-\pi, +\pi),\ z \in \mathbb{R}$$

(vgl. Abb. 11, links). Der Betrag der Determinate der Jacobi-Matrix berechnet sich zu $|\det g'| = r$.

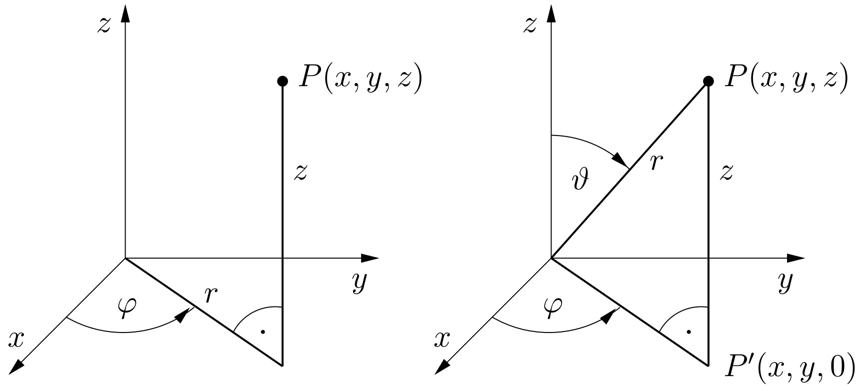



Abbildung 11: Zylinderkoordinaten und Kugelkoordianten

### Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten beschreiben die Lage eines Punktes $(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$ durch die Angabe von $(x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, \vartheta)$, wobei die Abbildung $g$ gegeben ist durch

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \qquad z = r\cos\vartheta,$$

$$r > 0,\ \varphi \in (-\pi, +\pi),\ \vartheta \in (0, \pi)$$

(vgl. Abb. 11, rechts). Der Betrag der Determinate der Jacobi-Matrix berechnet sich zu $|\det g'| = r^2 \sin\vartheta$.

**BEISPIEL 13.2** *Es soll das Volumen einer Kugel mit dem Radius $R$ bestimmt werden. Wir legen den Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung. Das Volumen ist gleich dem Volumen der geschlitzten Kugel*

$$\Omega' = \{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ \} \backslash \{(x, 0, z)\ :\ x \in [0, R)\},$$

*die das Bild des Würfels*

$$\Omega = \{(r, \varphi, \vartheta)\ :\ r \in (0, R),\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \vartheta \in (0, \pi)\ \}$$

*in Kugelkoordinaten ist. Der Transformationssatz gibt folgende Rechnung*

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Omega'} 1\, dxdydz = \int_{\Omega} r^2 \sin\vartheta\, drd\varphi d\vartheta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(-r^2 \cos\vartheta\right)\Big|_0^{\pi}\, d\varphi dr = 4\pi \int_0^R r^2\, dr = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

# 14 Oberflächenintegrale

## 14.1 Flächenstücke in $\mathbb{R}^3$

**DEFINITION 14.1** *Unter einer Flächenparametrisierung verstehen wir eine injektive $C^r$-Abbildung ($r \geq 1$) auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$, $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, deren partielle Ableitung $\partial_1\Phi(u)$, $\partial_2\Phi(u)$ an jeder Stelle $u \in U$ linear unabhängig sind.*

Für eine feste Stelle $u = (u_1, u_2)$ des Parameterbereiches U sind

$$s \mapsto \Phi(u_1 + s, u_2) \text{ und } t \mapsto \Phi(u_1, u_2 + t)$$

für hinreichend kleine $|s|, |t| \ll 1$ glatte $C^1$-Kurven auf der Bildmenge $\Phi(U)$. Die Tangentenvektoren an diesen Koordinatenlinien im Punkt $u = (u_1, u_2)$ sind (vgl. Abb. 12)

$$\partial_1\Phi(u) = \frac{d}{ds}\Phi(u_1 + s, u_2)|_{s=0} \quad , \quad \partial_2\Phi(u) = \frac{d}{dt}\Phi(u_1, u_2 + t)|_{t=0} \quad .$$

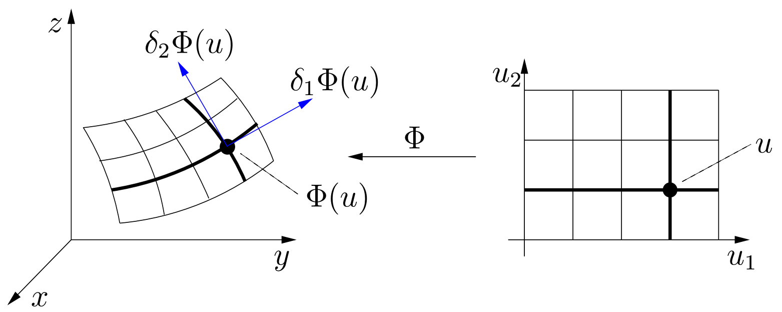



Abbildung 12: Flächenparametrisierung $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$.

**BEISPIEL 14.1** *Eine durch die Punkte $P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ gehende Ebene kann durch die Flächenparametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit*

$$\Phi(u_1, u_2) = P_1 + u_1(P_2 - P_1) + u_2(P_3 - P_1)$$

*beschrieben werden. Die Forderung der linearen Unabhängigkeit von $\partial_1\Phi(u) = P_2 - P_1$ und $\partial_2\Phi(u) = P_3 - P_1$ bedeutet, dass die drei Punkte tatsächlich eine Ebene aufspannen und nicht auf einer Geraden liegen.*

**BEISPIEL 14.2** *Die obere Hemisphäre einer Kugel vom Radius 1 mit Mittelpunkt im Ursprung kann durch die Flächenparametrisierung $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 < 1\}$*

$$\Phi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \end{pmatrix}$$

*beschrieben werden.*

**BEISPIEL 14.3** *Eine Flächenparametrisierung der Sphäre einer Kugel vom Radius 1 mit Mittelpunkt im Ursprung findet man durch Einführung von Kugelkoordinaten* $x = r\cos\varphi\sin\vartheta, y = r\sin\varphi\sin\vartheta, z = r\cos\vartheta$ *wie folgt. Wir setzen* $r = 1, \varphi = u_1, \vartheta = u_2$ *sowie* $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u_1 < 2\pi, 0 < u_2 < \pi\}$

$$\Phi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos u_1 \sin u_2 \\ \sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_2 \end{pmatrix}$$

*Beachte, dass diese Flächenparametrisierung den Nullmeridian einschließlich des Nord- und Südpols nicht enthält (vgl. Abb. 13, links).*

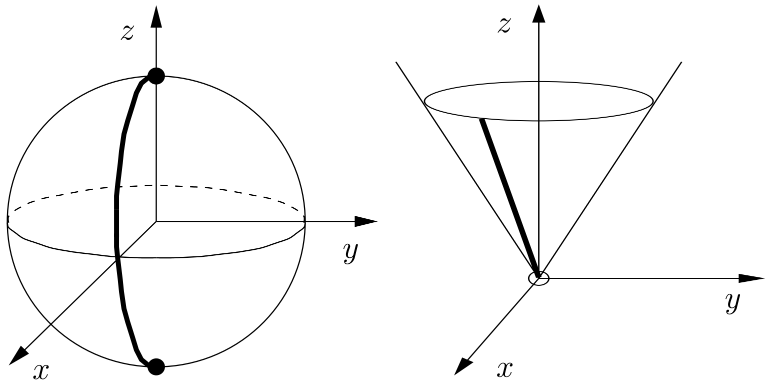



Abbildung 13: Sphäre ohne Nullmeridian (links) und geschlitzter Kreiskegelmantel (rechts).

**BEISPIEL 14.4** *Um eine Flächenparametrisierung des geschlitzten Kreiskegelmantels (vgl. Abb. 13, rechts) zu finden, gehen wir von Zylinderkoordinaten* $x = r\cos\vartheta, y = r\sin\vartheta, z = z$ *aus und setzen* $r = z = u_1$ *und* $\vartheta = u_2$*, so dass* $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 > 0, 0 < u_2 < 2\pi\}$ *und* $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ *durch*

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} u_1 \cos u_2 \\ u_1 \sin u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

*gegeben ist. Die lineare Unabhängigkeit der beiden Tangentenvektoren*

$$\partial_1\Phi(u) = (\cos u_2, \sin u_2, 1), \quad \partial_2\Phi(u) = u_1(-\sin u_2, \cos u_2, 0)$$

*ist wegen*

$$\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u) = u_1 \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u_2 & \sin u_2 & 1 \\ -\sin u_2 & \cos u_2 & 0 \end{vmatrix} = u_1(-\cos u_2, -\sin u_2, 1)$$

$$\|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\| = u_1\sqrt{\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 + 1} = u_1 > 0$$

*für jedes $u \in U$ gegeben.*

**DEFINITION 14.2** *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt $C^r$-Flächenstück, wenn sie das Bild einer $C^r$-Flächenparametrisierung $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit stetiger Umkehrabbildung ist ($r \geq 1$). Eine solche Parametrisierung nennen wir zulässig.*

**BEMERKUNG 14.1** *Flächenstücke sind zweidimensionale Analoga zu Kurvenstücken. Während wir bei der Parametrisierung von Kurvenstücken einen kompakten Parameterbereich vorausgesetzt haben, betrachten wir den Parameterbereich $U \subset \mathbb{R}^2$ bei der Parametrisierung von Flächenstücken als Gebiet (offene und zusammenhängende Menge). Diese Betrachtungsweise vermeidet Schwierigkeiten bei der Differenzierbarkeit am Rande.*

Wie im Fall von Kurvenstücken lassen sich verschiedene Parametrisierungen ein und desselben Flächenstückes ineinander "umrechnen".

**THEOREM 14.1** *Zu je zwei zulässigen $C^r$-Parametrisierungen $\Phi : U \to \mathbb{R}^3, \Psi : V \to \mathbb{R}^3$ eines $C^r$-Flächenstückes $M \subset \mathbb{R}^3$ gibt es einen $C^r$-Diffeomorphismus $h : U \to V$ mit*

$$\Phi = \Psi \circ h \quad .$$

*Der $C^r$-Diffeomorphismus $h$ heißt Transformation zwischen $\Psi$ und $\Phi$.*

## 14.2 Beispiel zur Approximation des Flächeninhaltes gekrümmter Flächen

Die Bestimmung des Flächeninhaltes gekrümmter Flächen (zweidimensionales Problem) ähnelt dem Problem der Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve (eindimensionales Problem). Die Bogenlänge rektifizierbarer Kurven haben wir in Abschnitt 12.2 als die kleinste obere Schranke der Länge aller Sehnenpolygone definiert. Sie ist damit als Grenzwert einer Folge von Polygonzuglängen bestimmbar. Dies legt die Idee nahe, den Inhalt gekrümmter Flächen als Grenzwert einer Folge von Polyederflächen zu bestimmen. Das folgende auf *H.A.Schwarz, 1843-1921* zurückgehende Beispiel zeigt jedoch, dass dieser Zugang allein nicht zum Ziel führt.

**BEISPIEL 14.5** *Approximation der Mantelfläche eines Zylinders durch eine Folge von Polyederflächen.*

Die Mantelfläche eines Zylinders vom Radius $R$ mit der Höhe $H$ beträgt bekanntlich $A_M = 2\pi RH$. Wir wollen die Mantelfläche durch eine Folge von Polyederflächen approximieren und zerlegen hierzu den Zylinder in $m$ Scheiben mit dem Radius $R$ und der Höhe $\frac{H}{m}$ (vgl. Abb. 14).

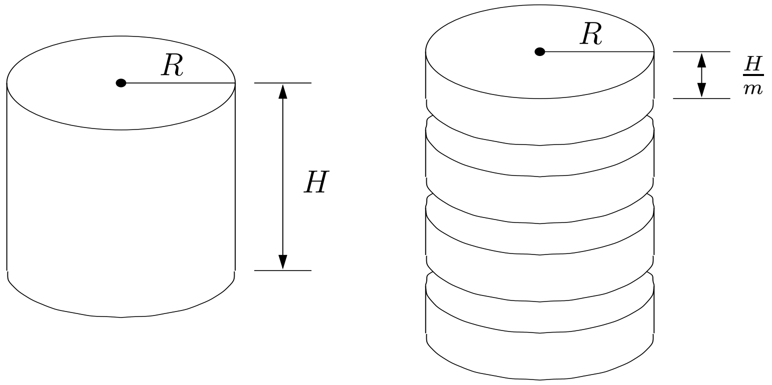



Abbildung 14: Zerlegung der Mantelfläche in $m$ Teilflächen.

Der Umfang jeder Scheibe werde in $n$ gleiche Teile zerlegt, wobei die Teilpunkte auf der oberen zu denen auf der unteren Deckfläche um einen Winkel von jeweils $\frac{\pi}{n}$ verdreht werden (vgl. Abb. 15).

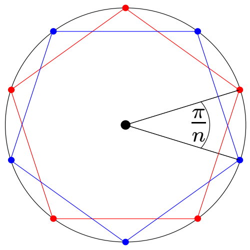



Abbildung 15: Zerlegung des Umfangs der Scheibe in $n = 5$ gleiche Teile (die Teilpunkte mit der gleichen Markierung entsprechen der oberen bzw. unteren Deckfläche).

Die Mantelfläche eines Teilzylinders wird nun in $2n$ gleich große Dreiecksflächen zerlegt, wobei ein Dreieck durch zwei Teilpunkte der unteren Deckfläche und dem darüberliegenden Teilpunkt der oberen Deckfläche gebildet wird (vgl. Abb. 16).

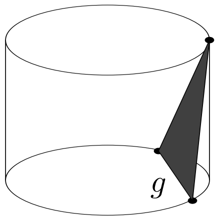



Abbildung 16: Ein Dreieck der die Mantelfläche des Zylinders approximierenden Polyederfläche.

Die Mantelfläche des Zylinders mit dem Radius R und der Höhe H wird nun durch die so konstruierte Polyederfläche, bestehend aus $2nm$ gleich großen Dreiecken, approximiert.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes eines dieser Dreiecke bestimmen wir zunächst die Länge der Grundlinie g (vgl. Abb. 16 bis Abb. 18).

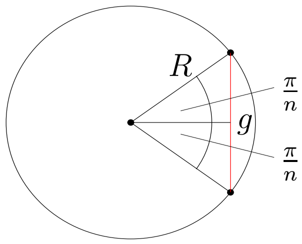



Abbildung 17: Berechnung der Grundlinie des Dreiecks aus Abb. 16.

Es ist

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{g}{2}}{R} \quad ,$$

also

$$g = 2R\ \sin\frac{\pi}{n} \quad .$$

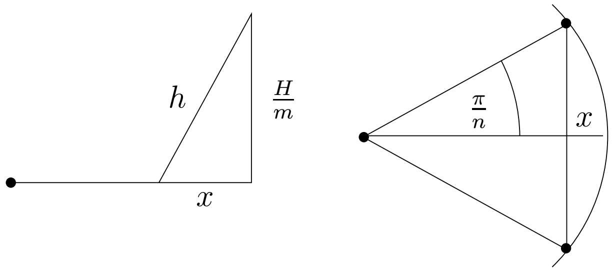



Abbildung 18:

Wir haben

$$x = R - R\cos\frac{\pi}{n}$$

und

$$h^2 = \left(\frac{H}{m}\right)^2 + x^2 \quad ,$$

woraus für die gesuchte Höhe

$$h = \sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + R^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

folgt. Ein Dreieck besitzt damit den Flächeninhalt

$$A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2} = R\ \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} \quad ,$$

die konstruierte Polyederfläche demnach den Flächeninhalt

$$A_P = 2nmR\ \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} \quad . \tag{2}$$

Wir sehen, dass zwar $\lim_{n,m\to\infty} A_\Delta = 0$, jedoch ist der Grenzwert der Polyederfläche $A_p$ vom Verhältnis $m$ zu $n^2$ abhängig.

Wir formen (2) um und erhalten

$$A_P = 2\pi RH\ \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\sqrt{1 + \frac{4R^2}{H^2}m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} \quad .$$

Sei nun $\alpha_{m,n} = \frac{2R}{H}m\sin^2\frac{\pi}{2n}$ und die Konstruktion der Polyederfläche derart gewählt, dass $\lim_{m,n\to\infty}\alpha_{m,n} = 0$. Dann folgt wegen $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ leicht

$$\lim_{m,n\to\infty} A_P = 2\pi RH \quad .$$

Die Folge der Polyederfläche approximiert also die Mantelfläche des Zylinders.

Der Grenzwert $\lim_{m,n\to\infty}\alpha_{m,n}$ existiert jedoch nicht, genauer: in Abhängigkeit vom Verhältnis $m/n^2$ können verschiedene nichtnegative Zahlen $\alpha$ angenommen werden. Um dies zu sehen, betrachten wir $m = pn^2$, $p \in \mathbb{N}$, und den Grenzwert für $n \to \infty$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\alpha_{m,n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2R}{H}pn^2\ \sin^2\frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{pR}{2H}\,\pi^2\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \frac{pR}{2H}\,\pi^2 =: \alpha \quad .\end{aligned}$$

Für den Grenzwert der Polyederflächen in diesem Fall also

$$\lim_{m,n\to\infty} A_P = 2\pi RH\sqrt{1+\alpha^2} \quad .$$

Aus dieser Darstellung folgern wir, dass

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} A_p = +\infty.$$

Obgleich die Mantelfläche des Zylinders $A_M = 2\pi RH$ einen endlichen Wert hat ist die Folge der Polyederflächen nicht beschränkt. Somit kann der Inhalt gekrümmter Flächen nicht als kleinste obere Schranke aller Polyederflächen definiert werden (Unterschied zur Länge einer rektifizierbaren Kurve).

In unserer obrigen Konstruktion wird der richtige Wert approximiert, wenn $\alpha = 0$ ist. Was bedeutet dies geometrisch? Wir betrachten hierzu Abb. 19 und bestimmen den Winkel $\gamma$ zwischen der Normalen $n_1$ der Mantelfläche des Zylinders und der Normalen $n_2$ eines Dreiecks der Polyederfläche.

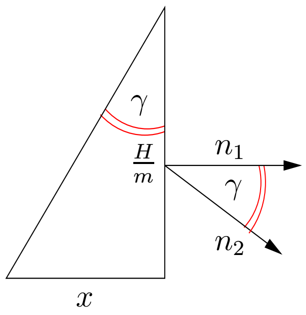



Abbildung 19: Winkel zwischen den Normalen der Mantelfläche und der approximierenden Polyederfläche.

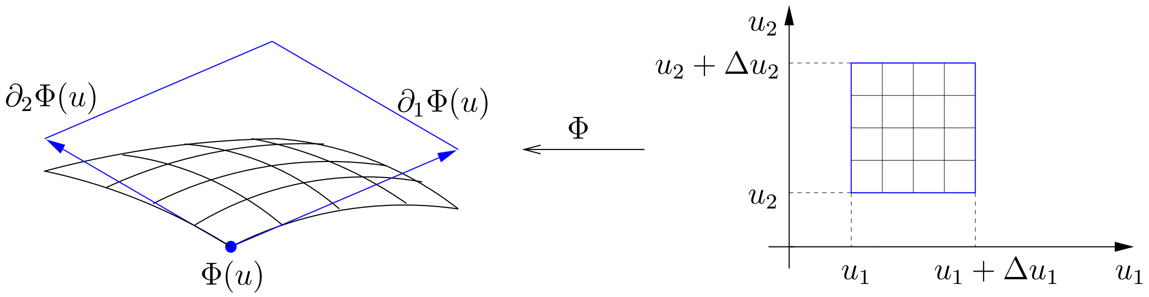
$$\tan\gamma = \frac{x}{\frac{H}{m}} = \frac{R(1-\cos\frac{\pi}{n})m}{H} = \frac{2Rm\sin^2\frac{\pi}{2n}}{H}$$

Somit ist $\alpha_{m,n} = \tan\gamma$ und $\lim_{m,n\to\infty} A_P = A_M = 2\pi RH$ genau dann, wenn nicht nur die Flächeninhalte der Dreiecke gegen Null gehen, sondern zugleich auch die Flächennormalen der Dreiecke, in die Flächennormale der gekrümmten Oberfläche übergehen. Diese Erkenntnis werden wir im Folgenden bei der Definition des Inhaltes gekrümmter Flächen berücksichtigen.

## 14.3 Der Flächeninhalt von Flächenstücken

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass es nicht genügt, den Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche durch eine Polyederfläche zu approximieren. Es war wesentlich, dass im Grenzprozess auch die Flächennormalen der gekrümmten Fläche und der Polyederfläche ineinander übergehen. Die Idee, die wir nun verfolgen, approximiert den Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche lokal durch den Flächeninhalt eines Parallelogramms auf der Tangentialebene der Fläche. Damit sichern wir im Grenzprozess das Ineinanderübergehen der beiden Flächennormalen.

Es sei eine Flächenparametrisierung $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vorgegeben. Das Bild eines differentiell kleinen Rechteckes $R = [u_1, u_1 + \Delta u_1] \times [u_2, u_2 + \Delta u_2]$ im Parameterbereich ist ein krummlinig berandetes Viereck auf der gekrümmten Fläche (vgl. Abb. 14.3)




Wir approximieren nun den Flächeninhalt des krummlinig berandeten Viereckes durch den Flächeninhalt der Projektion auf die zugeordnete Tangentialebene. Die Darstellung des dabei entstehenden ebenen Parallelogrammes ergibt sich leicht aus der Taylorschen Formel

$$\Phi(u+h) \approx \Phi(u)+\partial_1\Phi(u)h_1+\partial_2\Phi(u)h_2 =: \Psi(u+h) \quad \forall (h_1, h_2) \in (0, \Delta u_1)\times(0, \Delta u_2) \quad .$$

Der Flächeninhalt des Parallelogrammes ist gleich dem Betrag des aus den beiden Vektoren $\partial_1\Phi(u)\Delta u_1$ und $\partial_2\Phi(u)\Delta u_2$ gebildeten Kreuzproduktes. Also gilt für das approximierte Flächenelement

$$A_e \approx \|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\|\Delta u_1\Delta u_2 \quad .$$

Setzen wir $g_{i,k}(u) := (\partial_i\Phi(u), \partial_k\Phi(u))$ und die Gramsche Determinante von $\Phi$

$$g(u) = \det(g_{i,k}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad ,$$

so können wir schreiben ($\varphi$ sei der Winkel zwischen $\partial_1\Phi(u)$ und $\partial_2\Phi(u)$)

$$\begin{aligned} \|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\|^2 &= \|\partial_1\Phi(u)\|^2 \|\partial_2\Phi(u)\|^2 \sin^2\varphi \\ &= \|\partial_1\Phi(u)\|^2 \|\partial_2\Phi(u)\|^2 (1 - \cos^2\varphi) \\ &= \|\partial_1\Phi(u)\|^2 \|\partial_2\Phi(u)\|^2 - (\partial_1\Phi(u), \partial_2\Phi(u))^2 = g(u) \quad . \end{aligned}$$

Für ein differenziell kleines Flächenelement $A_e$ folgt dann

$$A_e \approx \sqrt{g(u)}\Delta u_1 \Delta u_2 \quad ,$$

und bei Zerlegung des Flächenstückes in $N$ Flächenelemente

$$A \approx \sum_{e=1}^{N} \sqrt{g(u_e)}\Delta u_1 \Delta u_2 \quad .$$

Für $N \to \infty$ erhalten wir das Integral

$$A(M) := \int\int_U \sqrt{g(u)} du_1 du_2 \quad ,$$

das wir zur Definition des Flächeninhaltes des durch die Parametrisierung gegebenen Flächenstückes $M$ verwenden wollen. Die Definition macht nur dann Sinn, wenn der Flächeninhalt $A(M)$ nicht von der gewählten Parametrisierung abhängt.

**LEMMA 14.1** *Die Zuordnung $M \mapsto A(M)$ ist von der gewählten Parametrisierung von $M$ unabhängig.*

**Beweis:** Seien $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zwei Parametrisierungen des $C^r$-Flächenstückes $M \subset \mathbb{R}^3$ und $g(u)$ bzw. $g^*(v)$ die zugeordneten Gramschen Determinanten. Dann gibt es einen $C^r$-Diffeomorphismus $h$ mit $\Phi = \Psi \circ h$. Nach der Kettenregel gilt

$$\partial_1\Phi(u) = \partial_1\Psi(h(u))\partial_1 h_1 + \partial_2\Psi(h(u))\partial_1 h_2 \quad ,$$

$$\partial_2\Phi(u) = \partial_1\Psi(h(u))\partial_2 h_1 + \partial_2\Psi(h(u))\partial_2 h_2 \quad .$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u) &= (\partial_1\Psi(h(u)) \times \partial_2\Psi(h(u)))(\partial_1 h_1 \partial_2 h_2 - \partial_1 h_2 \partial_2 h_1) \\
&= (\partial_1\Psi(h(u)) \times \partial_2\Psi(h(u))) \det D(h) \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\sqrt{g(u)} &= \|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\| = |\det D(h)| \|(\partial_1\Psi \times \partial_2\Psi)(h(u))\| \\
\sqrt{g(u)} &= |\det D(h)| \sqrt{g^*(h(u))} \quad .
\end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz für Integrale erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
\int\int_V \sqrt{g^*(v)} dv_1 dv_2 &= \int\int_U \sqrt{g^*(h(u))} |\det D(h)| du_1 du_2 \\
&= \int\int_U \sqrt{g(u)} du_1 du_2 = A(M) \quad .
\end{aligned}$$

**BEMERKUNG 14.2** *Das Symbol* $\sqrt{g(u)}du_1du_2$ *wird skalares Oberflächenelement genannt und in der Literatur mit do, dA oder dS bezeichnet.*

**BEMERKUNG 14.3** *In den von C. F. Gauß eingeführten Bezeichnungen* $E, F, G$ *für* $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ *lautet die Gramsche Determinante*

$$g(u) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

*und das Oberflächenelement*

$$do = \sqrt{EG - F^2}du_1du_2 \quad .$$

**BEMERKUNG 14.4** *Ohne einen expliziten Beweis dafür anzugeben, vereinbaren wir, dass stückweise glatten Kurven und endlich vielen Punkten der Flächeninhalt Null zugeschrieben wird.*

**BEISPIEL 14.6** *Wir bestimmen den Flächeninhalt der Sphäre* $S_R = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R\}$ *mit* $R > 0$. *Für die Berechnung nehmen wir den Nullmeridian heraus, betrachten also*

$$S_R' = S_R \backslash N_M \quad mit \quad N_M = \{(\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta), 0 \leq \vartheta \leq \pi\} \quad .$$

*Wir verwenden Kugelkoordinaten, um eine Parametrisierung von* $S_R'$ *anzugeben:*

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3 : (\varphi, \vartheta) \to \begin{bmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

*mit*

$$U = \{(\varphi, \vartheta) : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi\} \quad .$$

*Dann erhalten wir zunächst*

$$\partial_\varphi\Phi = \begin{bmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

*und*

$$\partial_\vartheta\Phi = \begin{bmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{bmatrix} \quad .$$

*Dann ist*

$$g_{\varphi\varphi} = (\partial_\varphi\Phi, \partial_\varphi\Phi) = R^2\sin^2\vartheta$$

$$g_{\varphi\vartheta} = g_{\vartheta,\varphi} = (\partial_\varphi\Phi, \partial_\vartheta\Phi) = 0$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = (\partial_\vartheta\Phi, \partial_\vartheta\Phi) = R^2$$

*und somit*

$$g(u) = \begin{vmatrix} R^2\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix} = R^4\sin^2\vartheta \quad .$$

*Für den Flächeninhalt der Sphäre folgt damit*

$$A(S_r) = A(S_r\backslash N_M) = \int\limits_U \sqrt{g(u)}d\varphi d\vartheta = R^2\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\sin\vartheta d\varphi d\vartheta = 2\pi R^2\int\limits_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta = 4\pi R^2 \quad .$$

## 14.4 Skalare Oberflächenintegrale

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Ein skalares Oberflächenintegral (oder Oberflächenintegral 1. Art) von $f$ über $M$ ist definiert durch

$$\int\limits_M f(x)do := \int\limits_U f(\Phi(u))\sqrt{g(u)}du_1du_2 \quad ,$$

wobei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine zulässige Parametrisierung von $M$ und $g(u)$ die Gramsche Determinate von $\Phi$ ist, also

$$g(u) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2$$

und $\Phi(u) = \Phi(u_1, u_2)$, $E = (\partial_1\Phi, \partial_2\Phi)$, $G = (\partial_2\Phi, \partial_2\Phi)$ und $F = (\partial_1\Phi, \partial_2\Phi)$. Die Definition ist von der gewählten Parametrisierung von $M$ unabhängig.

**BEISPIEL 14.7** *(Zwiebelweise Integration)*
*Seien $K_R$ eine Kugel mit dem Radius $R$ und dem Mittelpunkt im Ursprung und $f$ stetig auf $K_R$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{K_R} f(x)dx = \int\limits_0^R \left(\int\limits_{S_r} f(x)do\right) dr \quad .$$

**Beweis:** Sei $N = \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ und $K'_R = K_R\backslash N$ die längs des Meridians $N$ geschlitzte Kugel. Wir führen Kugelkoordinaten $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$ und $z = r\cos\vartheta$ sowie $\Omega = \{(r, \vartheta, \varphi) : 0 < r < R, 0 < \vartheta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ ein. Die geschlitzte Kugel ist das diffeomorphe Bild des Quaders $\Omega$, also

$$\int\limits_{K_R} f(x)dx = \int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\cdot r^2\sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr \quad .$$

Wir berechnen nun für ein festes $r \in (0, R)$

$$\int_{S_r} f(x)do \quad .$$

Die Abbildung $\Phi$

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad , \quad (\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

ist für jedes feste $r \in (0, R)$ eine zulässige Parametrisierung der geschlitzen Sphäre

$$S_r' = S_r \backslash N \quad \text{mit} \quad N = \{(\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq \pi\} \quad .$$

Wegen $\partial_\vartheta \Phi = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, -r\sin\vartheta)$ und $\partial_\varphi \Phi = (-r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\varphi\sin\vartheta, 0)$ ist die Gramsche Determinante

$$g(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\vartheta$$

und folglich

$$do = \sqrt{g(u)}du_1du_2 = r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi \quad .$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} \int_{S_r} f(x)do &= \int_{S_r'} f(x)do \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)r^2\sin\vartheta d\varphi d\vartheta \quad , \end{aligned}$$

so dass

$$\int_{K_R} f(x)dx = \int_0^R \int_{S_r} f(x)dodr$$

folgt.

## 14.5 Orientierte Flächenstücke und vektorielle Oberflächenintegrale

In den Anwendungen ist es manchmal erforderlich die Ober- bzw. Unterseite einer Fläche zu unterscheiden. Mathematisch wird dies durch den Begriff orientierter Flächenstücke gefaßt.

**DEFINITION 14.3** *$M \subset \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück. Zwei zulässige Parametrisierungen heißen gleichorientiert, wenn für die zugehörige Parametertransformation $h$*

$$\det |Dh| > 0$$

*gilt; andernfalls heißen sie entgegengesetzt orientiert.*

**BEMERKUNG 14.5** *Ist $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine zulässige Parametrisierung von $M \subset \mathbb{R}^3$, so führt die Parametertransformation*

$$(u_1, u_2) \mapsto h(u_1, u_2) = (u_2, u_1) \quad ,$$

*die nur die Reihenfolge der Parameter vertauscht, wegen* $\det Dh < 0$ *zu einer $\Phi$ entgegengesetzten Parametrisierung $\Psi$. Wegen*

$$\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u) = -\partial_2\Phi(u) \times \partial_1\Phi(u)$$

*sind die der Parametrisierung zugeordneten Flächennormalen entgegengesetzt.*

Man erhält ein orientiertes Flächenstück $M$, wenn eine der beiden Orientierungen ausgezeichnet wird. Dies kann etwa durch Angabe der Flächennormalen oder der dazu gehörenden positiven Parametrisierung geschehen (vgl. Abb. 20).

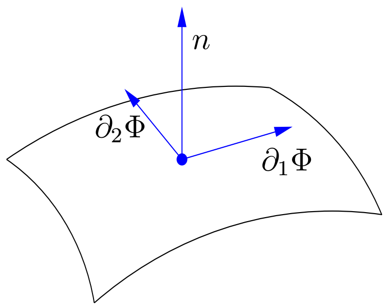



Abbildung 20: Flächennormale und positive Parametrisierung.

**DEFINITION 14.4** *$M$ sei ein orientiertes Flächenstück und $\vec{f} : M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei stetig. Dann definieren wir das vektorielle Oberflächenintegral durch*

$$\int\limits_M \vec{f} \cdot d\vec{o} := \int\limits_U (\vec{f}(\Phi(u)), \partial_{u_1}\Phi \times \partial_{u_2}\Phi) du_1 du_2 \quad ,$$

*wobei $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die zugehörige positive Parametrisierung von $M$ ist. Hierbei steht $(.,.)$ für das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{f}(\Phi(u))$ und $\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)$. Das Symbol $d\vec{o} = \partial_1\Phi \times \partial_2\Phi \; du_1 du_2$ wird vektorielles Oberflächenelement genannt.*

Das vektorielle Oberflächenintegral kann auf ein skalares Oberflächenintegral wie folgt zurückgeführt werden. Der zur positiven Parametrisierung gehörende Flächeneinheitsnormalenvektor berechnet sich zu

$$\vec{n} = \frac{\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)}{\|\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)\|} \quad .$$

Wegen $do = \sqrt{g(u)} du_1 du_2 = \|\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)\| du_1 du_2$ ist also

$$\int\limits_M \vec{f} \cdot d\vec{o} = \int\limits_U \vec{f}(\Phi(u)) \cdot \vec{n}(u) \|\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)\| du_1 du_2$$

$$\int\limits_M \vec{f} \cdot d\vec{o} = \int\limits_M \vec{f} \cdot \vec{n} do \quad .$$

**BEMERKUNG 14.6** *Das auf der rechten Seite stehende Integral gestattet eine einfache physikalische Interpretation. Ist $\vec{f}$ ein Geschwindigkeitsfeld, so stellt es den Fluss durch das Flächenstück $M$ ($\vec{f} \cdot \vec{n}$ ist die Geschwindigkeit in Normalenrichtung) dar.*

**BEMERKUNG 14.7** *Gelegentlich findet man im Fall $\vec{f} = (P, Q, R)$ für das vektorielle Oberflächenintegral auch die Darstellung*

$$\int\limits_M \vec{f} \cdot d\vec{o} = \int \int\limits_M P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad .$$

**BEISPIEL 14.8** *Gegeben seien $\vec{v} = (0, 0, x^2, y^2, z)$ und $M$ die untere Seite der Hemissphäre, also $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit $z > 0$. Zunächst wird die Fläche $M$ parametrisiert. Hierfür bieten sich Kugelkoordinaten an, also $x = R \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = R \sin\varphi \sin\vartheta$ und $z = R \cos\vartheta$, wobei $0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist. Um die zur "unteren Seite" gehörige positive Parametrisierung zu finden, berechnen wir*

$$\partial_\varphi \Phi = (-R \sin\varphi \sin\vartheta, R \cos\varphi \sin\vartheta, 0)$$

*und*

$$\partial_\vartheta \Phi = (R \cos\varphi \cos\vartheta, R \sin\varphi \sin\vartheta, -R \sin\vartheta) \quad .$$

*Das Kreuzprodukt ergibt*

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi\Phi \times \partial_\vartheta\Phi &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\vartheta & R\sin\varphi\cos\vartheta & -R\sin\vartheta \end{vmatrix} \\
&= R^2\sin\vartheta \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{vmatrix} \\
&= R^2\sin\vartheta \begin{bmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{bmatrix} \quad ,
\end{aligned}$$

*also eine negative z-Komponente von $\partial_\varphi\Phi \times \partial_\vartheta\Phi$. Die positive Parametrisierung von $M$ ist demzufolge*

$$(\varphi,\vartheta) \mapsto \Phi(\varphi,\vartheta) = (R\cos\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\vartheta) \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_M \vec{v}\cdot d\vec{o} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta\cdot R^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta\cdot R\cdot\cos\vartheta\cdot R^2\sin\vartheta(-\cos\vartheta)d\vartheta d\varphi \\
&= -R^7\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\int_0^{frac\pi 2}\sin^5\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta d\varphi \\
&= -R^7\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\cdot\int_0^{frac\pi 2}\sin^5\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta \quad .
\end{aligned}$$

*Betrachten wir nun das erste Integral mit dem Vorfaktor. Es gilt* $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$ *und somit*

$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi = \frac{1}{8}(1-\cos 4\varphi) \quad ,$$

*was wegen*

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos 4\varphi d\varphi = 0$$

*für das erste Integral*

$$-R^7\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{4}R^7$$

*ergibt.*

*Nun zum zweiten Integral. Wir substituieren* $\cos\vartheta = \lambda$, *d. h.*

$$-\sin\vartheta d\vartheta = d\lambda$$

*und mit der Bedingung* $\sin^4\vartheta = (1-\cos^2\vartheta)^2$ *folgt*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta = -\int_1^0 (1-\lambda^2)^2\lambda^2 d\lambda = \int_0^1 (1-2\lambda+\lambda^4)\lambda^2 d\lambda = \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{2}{5}\lambda^5 + \frac{1}{7}\lambda^7|_0^1 = \frac{8}{105} \quad .$$

*Insgesamt ergibt sich*

$$\int_M \vec{v}\cdot d\vec{o} = -R^7\frac{\pi}{4}\cdot\frac{8}{105} = -\frac{-2\pi R^7}{105} \quad .$$

# 15 Integralsätze von Gauß und Stokes

Die Integralsätze von Gauß und Stokes sind mehrdimensionale Verallgemeinerungen des bekannten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a).$$

Beispielsweise haben wir für das Kurvenintegral 2. Art (Vektorielles Kurvenintegral) entlang eines die Punkte $P_1$ und $P_2$ verbindenden Kurvenstückes $\gamma$

$$\int_\gamma \nabla U \cdot d\vec{x} = U(P_2) - U(P_1).$$

Zur Formulierung der Integralsätze verwenden wir die in der Physik übliche Schreibweise der klassischen Vektoranalysis.

Einen Zusammenhang zwischen dem vektoriellen Oberflächenintegral über eine orientierte Oberfläche $S$ und dem vektoriellen Kurvenintegral über die Randkurve $\partial S$ stellt der Integralsatz von Stokes her.

**Integralsatz von Stokes:**

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

Man beachte, dass beide Integrale von der Orientierung von $S$ bzw. $\partial S$ abhängen. Der Satz gilt in dem Fall, dass ausgehend von der durch die Flächennormalen von $S$ gegebenen Orientierung die Randkurve $\partial S$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird (vgl. Abb. 21).

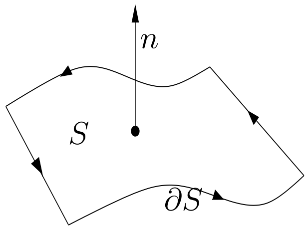



Abbildung 21: Orientiertes Flächenstück $S$ und Durchlaufungssinn der Randkurve $\partial S$.

Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}$ ist durch

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

gegeben.

Einen Zusammenhang zwischen dem mehrfachen Integral (Volumen- bzw. Flächenintegral) und dem skalaren Oberflächenintegral stellt der Integralsatz von Gauß her.

**Integralsatz von Gauß:**

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{v}\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\vec{n}\, d\gamma$$

Hierbei sind $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor auf der $\Omega$ begrenzenden Oberfläche $\partial\Omega$ und die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch

$$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

definiert.

Der Aufwand zum Beweis der beiden Integralsätze ist abhängig vom Allgemeinheitsgrad der zu betrachtenden Gebiete und Oberflächen usw. Im folgenden werden wir uns darauf beschränken, die Korrektheit der beiden Sätze in Spezialfällen zu zeigen.

## 15.1 Beweis des Integralssatzes von Stokes für Rechteckgebiete

Sei $S = [a,b] \times [c,d]$ ein orientiertes Flächenstück in der $x,y$-Ebene mit der Flächennormalen $\vec{n} = (0,0,1)$. Der zu dieser Orientierung gehörende Durchlaufungssinn der Randkurve ist in Abbildung 22 gezeigt.

Wir nehmen an, dass $\vec{v}$ ein $C^1$-Vektorfeld auf einer Umgebung von $S$ sei und werden den Integralsatz von Stokes durch direktes Ausrechnen der Integrale auf beiden Seiten der Gleichung nachweisen.

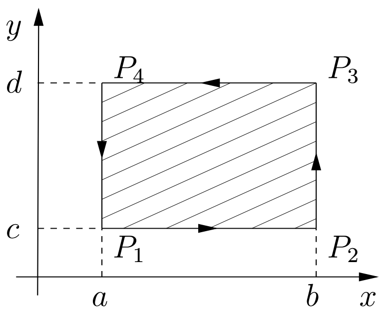



Abbildung 22: Durchlaufungssinn des Randes der orientierten Rechteckfläche $S$.

Eine Flächenparametrisierung von $S$ ist durch $(x, y) \mapsto \Phi(x, y) = (x, y, 0)$, $a < x < b$ und $c < y < d$, gegeben. Dann folgt $\partial_x \Phi = (1, 0, 0)$, $\partial_y \Phi = (0, 1, 0)$ und somit $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (0, 0, 1) = \vec{n}$. Das Integral über die orientierte Oberfläche $S$ berechnet sich damit wie folgt

$$
\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} &= \int_a^b \int_c^d \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \, dydx = \int_a^b \int_c^d \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dydx \\
&= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial v_2}{\partial x} dxdy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial v_1}{\partial y} dydx \\
&= \int_c^d (v_2(b, y) - v_2(a, y)) \, dy - \int_a^b (v_1(x, d) - v_1(x, c)) \, dx
\end{aligned}
$$

Um das vektorielle Kurvenintegral über die Kette von Kurvenstücken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, $\overline{P_4P_1}$ zu berechnen, benötigen wir zunächst Parametrisierungen der vier Kurvenstücke:

$$
\begin{array}{llll}
\overline{P_1P_2}: & \alpha_1(t) = (t, c, 0), & t \in [a, b], & \dot{\alpha}_1 = (1, 0, 0) \\
\overline{P_2P_3}: & \alpha_2(t) = (b, t, 0), & t \in [c, d] & \dot{\alpha}_2 = (0, 1, 0) \\
\overline{P_3P_4}: & \alpha_3(t) = (b - t, c, 0), & t \in [0, b - a] & \dot{\alpha}_3 = (-1, 0, 0) \\
\overline{P_4P_1}: & \alpha_4(t) = (a, d - t, 0), & t \in [0, d - c] & \dot{\alpha}_4 = (0, -1, 0)
\end{array}
$$

Die Berechnungsformel für ein vektorielles Kurvenintegral liefert dann

$$
\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b v_1(t, c, 0) dt + \int_c^d v_2(b, t, 0) dt - \int_0^{b-a} v_1(b - t, d, 0) dt - \int_0^{d-c} v_2(a, d - t, 0) dt.
$$

Wegen

$$
- \int_0^{b-a} v_1(b - t, d, 0) dt = \int_b^a v_1(s, d, 0) ds = - \int_a^b v_1(s, d, 0) ds
$$

und

$$-\int_0^{d-c} v_2(a, d-t, 0)dt = \int_d^c v_2(a, s, 0)ds = -\int_c^d v_2(a, s, 0)ds$$

folgt durch Zusammenfassung

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b (v_1(t, c, 0) - v_1(t, d, 0))\, dt + \int_c^d (v_2(b, t, 0) - v_2(a, t, 0))\, dt,$$

was zeigt, dass

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

gilt. ♣

## 15.2 Integralsatz von Stokes für zweidimensionale Pflaster

Die wesentliche Idee des im letzten Abschnitt geführten Beweises des Integralssatzes von Stokes basiert auf der Integration entlang von Koordinatenlinien. Diese Idee läßt sich durch glatte Transformationen von Rechteckgebieten auf allgemeinere orientierte Flächenstücke $S$ erweitern (vgl. Abb. 23).

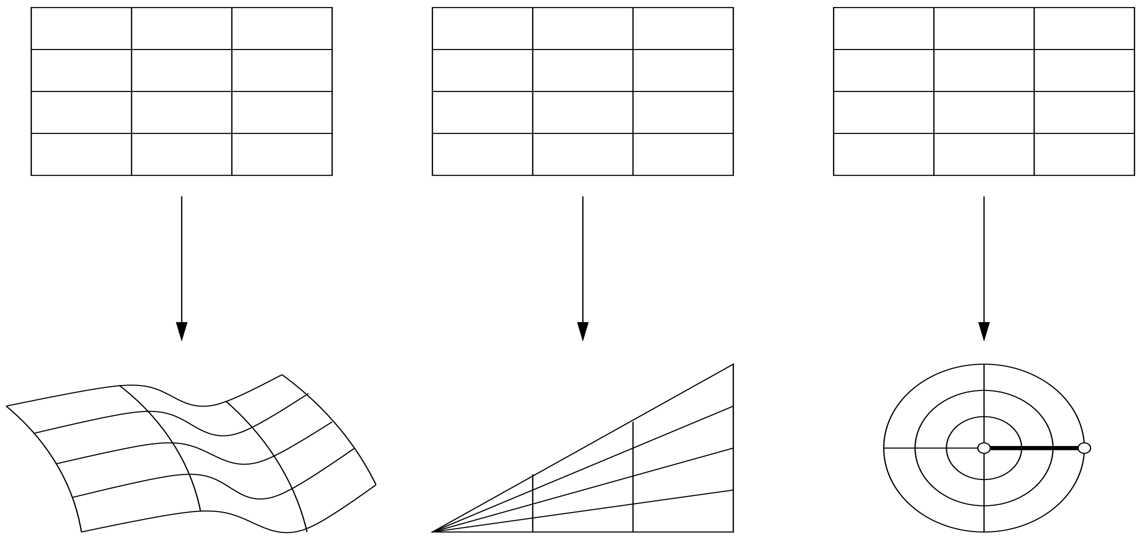


Abbildung 23: Transformation eines Rechteckgebietes auf allgemeinere orientierte Flächenstücke.

Als Referenzgebiet betrachten wir im Folgenden das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ mit den (entgegen dem Uhrzeigersinn) orientierten Kantenparametrisierungen $\sigma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, 4$, wie in Abb. 24 angegeben.

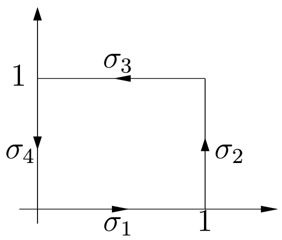



Abbildung 24: Referenzquadrat zur Definition zweidimensionaler Pflaster.

**DEFINITION 15.1** *Ein orientiertes Flächenstück $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt zweidimensionales Pflaster, wenn es eine $C^2$-Abbildung $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ auf einer Umgebung $U$ von $[0,1]^2$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

*(a) die Einschränkung von $\Phi$ auf $(0,1) \times (0,1)$ ist eine positive Flächenparametrisierung von $S$,*

*(b) das Innere der $k$-ten Kante von $\Phi$, $k = 1,2,3,4$,*

$$\varphi_k := \Phi \circ \sigma_k : (0,1) \to \mathbb{R}^3$$

*ist entweder konstant (entartet) oder injektiv und regulär,*

*(c) mehr als zwei nicht entartete Kanten können sich nicht treffen, trifft sich die $j$-te mit der $k$-ten Kante ($j \neq k$), so existiert eine $C^1$-Parametertransformation $h : [0,1] \to [0,1]$ mit $\varphi_j = \varphi_k \circ h$ mit $\dot{h} < 0$. $\Phi$ heißt Pflasterparametrisierung von $S$.*

Wir wollen nun einige Beispiele von zweidimensionalen Pflastern betrachten.

**BEISPIEL 15.1** *Sei zunächst $\Phi : [0,1]^2 \subset U \to \mathbb{R}^3$ mit*

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 u_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Dann ist $\Phi$ eine Pflasterparametrisierung des in der $x,y$-Ebene liegenden Dreiecks $S$ (vgl. Abb. 25).*

*Insbesondere sind die Kanten $\varphi_k = \Phi \circ \sigma_k$, $k = 1, \ldots, 3$, injektiv und regulär, wohingegen die Kante $\varphi_4$ entartet ist. Eine mögliche Parametrisierung der Kanten $\sigma_k$ bzw. $\varphi_k$, $k = 1, \ldots, 4$, ist die folgende:*

$$\begin{array}{lll} \sigma_1(t) = (t,0), & \varphi_1 = (t,0,0) & t \in [0,1] \\ \sigma_2(t) = (1,t), & \varphi_2 = (1,t,0) & t \in [0,1] \\ \sigma_3(t) = (1-t,1), & \varphi_3 = (1-t,1-t,0) & t \in [0,1] \\ \sigma_4(t) = (0,1-t), & \varphi_4 = (0,0,0) & t \in [0,1] \end{array}$$

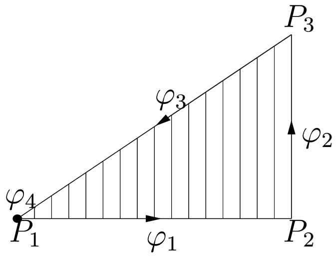



Abbildung 25: Ebenes Dreieck als zweidimensionales Pflaster.

**BEISPIEL 15.2** *Nun betrachten wir für ein gegebenes $\Theta \in (0, 2\pi]$ die Abbildung $\Phi : [0,1]^2 \subset U \to \mathbb{R}^3$ mit*

$$(u_1, u_2) \mapsto \Phi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta u_1) \\ \sin(\Theta u_1) \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

*Hier ist $S$ eine Teilmenge der Mantelfläche eines Kreiszylinders mit Mittelpunkt im Ursprung, Radius und Höhe gleich Eins. Im Fall $\Theta = 2\pi$ ist die Teilfläche des Zylindermantels geschlossen. Für die sich ergebenen Parametrisierungen der Kanten gilt (vgl. Abb. 26):*

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= (\cos\Theta t, \sin\Theta t, 0) && t \in [0,1] \\ \varphi_2(t) &= (\cos\Theta, \sin\Theta, t) && t \in [0,1] \\ \varphi_3(t) &= (\cos\Theta(1-t), \sin\Theta(1-t), 1) && t \in [0,1] \\ \varphi_4(t) &= (1, 0, 1-t) && t \in [0,1] \end{aligned}$$

*Keine Kante ist entartet, allerdings treffen sich im Fall $\Theta = 2\pi$ die Kanten $\varphi_2$ und $\varphi_4$, wobei für die Parametertransformation $s = h(t) = 1-t$, die $\varphi_4(t) = (\varphi_2 \circ h)(t)$ sichert, $\dot{h} = -1 < 0$ gilt.*

**THEOREM 15.1 (Stokesscher Integralsatz für Pflaster im $\mathbb{R}^3$)** *Ist $\vec{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein $C^1$-Vektorfeld und $S$ ein zweidimensionales Pflaster mit $\bar{S} \subset \Omega$, so gilt*

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x}.$$

**Beweisidee.** Mit Hilfe einer Pflasterparametrisierung $\Phi$ wird das Vektorfeld auf das Einheitsquadrat zurückgeholt. Für das zurückgeholte Vektorfeld wenden wir den Integralsatz von Stokes für Rechteckgebiete an. ♣

**BEISPIEL 15.3** *Wir wollen das vektorielle Kurvenintegral*

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

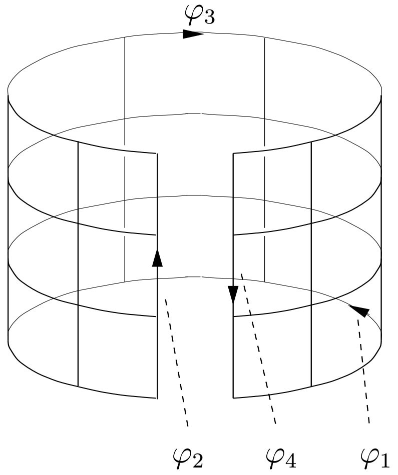



Abbildung 26: Teil einer Mantelfläche eines Zylinders als zweidimensionales Pflaster.

*mit* $\vec{v} = (x^2y^3, 1, z)$ *und der im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kurve* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0\}$ *auf unterschiedliche Weise berechnen.*

**Variante 1:** *(direkte Berechnung als Kurvenintegral)*
*Eine Parametrisierung der orientierten Kurve ist durch*

$$\alpha(t) = (R\cos t, -R\sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

*gegeben. Wegen* $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = -R(\sin t, \cos t, 0)$ *folgt*

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{x} &= -R\int_0^{2\pi} (R^5\cos^2 t \sin^3 t, 1, 0) \cdot (\sin t, \cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (R^6\cos^2 t\sin^4 t - R\cos t + 0)\, dt. \end{aligned}$$

*Das Integral von* $0$ *bis* $2\pi$ *über* $\cos t$ *verschwindet, der Integrand für das verbleibende Integral kann unter Nutzung trigonometrischer Formeln wie folgt umgeformt werden*

$$\begin{aligned} \cos^2 t\sin^4 t &= \sin^2 t\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\frac{1}{8}(1 - \cos 4t) \\ &= \frac{1}{16}(1 - \cos 2t - \cos 4t + \cos 2t\cos 4t) \\ &= \frac{1}{16}\left(1 - \cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)\right). \end{aligned}$$

*Dabei haben wir im letzen Schritt*

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

*benutzt. Insgesamt ergibt sich*

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{x} = \frac{\pi R^6}{8}.$$

**Variante 2:***(Überführung des vektoriellen Kurvenintegrals in ein vektorielles Oberflächenintegral unter Nutzung des Integralssatzes von Stokes)*
*Es gibt viele orientierte Flächenstücke $S$, die die Kurve $C$ als Randkurve $\partial S$ besitzen. Wir wählen die obere Hemisphäre einer Kugel vom Radius $R$ mit Mittelpunkt im Ursprung. Entsprechend der Orientierung von $C$ ist die Flächennormale auf $S$ zum Ursprung hin gerichtet. Es gilt dann*

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{x} = \int_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{o}.$$

*Zur Berechnung des Oberflächenintegrals suchen wir eine Parametrisierung von $S$, die leicht mit Hilfe von Kugelkoordinaten gefunden werden kann. Es ist*

$$(\varphi,\vartheta)\mapsto\Phi(\varphi,\vartheta) = (R\cos\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\vartheta), \quad (\varphi,\vartheta)\in(0,2\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})$$

*die obere Hemisphäre ohne Nullmeridian und Nordpol. Setzt man $u_1 = \varphi/(2\pi)$ und $u_2 = 2\vartheta/\pi$, so stellt $\Phi^*(u_1,u_2) = \Phi(2\pi u_1, \frac{\pi}{2}u_2)$ eine Pflasterparametrisierung von $S$ dar, bei der die Kante $\varphi_1$ (d.h. $u_1 = t$, $u_2 = 0$) zum Nordpol entartet und die Kanten $\varphi_2$ (d.h. $u_1 = 1$, $u_2 = t$) und $\varphi_4$ (d.h. $u_1 = 1$, $u_2 = 1-t$) sich auf dem Nullmeridian treffen. Die Ableitung der Parametertransformation $h(t) = 1-t$, für die $\varphi_4(t) = (\varphi_2\circ h)(t)$ gilt, ist negativ.*

*Wir müssen noch prüfen, ob die Parametrisierung zur richtigen Orientierung von $S$ führt. Es ist*

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi\Phi &= (-R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\varphi\sin\vartheta, 0),\\
\partial_\vartheta\Phi &= (R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, -R\sin\vartheta),
\end{aligned}$$

*woraus für die $z$-Komponente des Kreuzproduktes beider Vektoren*

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi\Phi\times\partial_\vartheta\Phi &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ -R\sin\varphi\sin\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta & 0\\ R\cos\varphi\cos\vartheta & R\sin\varphi\cos\vartheta & -R\sin\vartheta \end{vmatrix}\\
&= (\ldots,\ldots,-R^2\sin\vartheta\cos\vartheta)
\end{aligned}$$

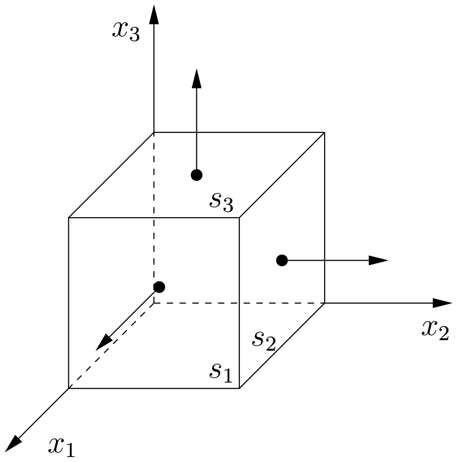



Abbildung 27: Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ mit Flächennormalen zu $S_1, S_2, S_3$.

*folgt. Im Bereich* $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$ *ist die z-Komponente der Normalen negativ, die Normale also zum Ursprung gerichtet, wie es der Fall sein soll. Wir berechnen noch die Rotation des Vektorfeldes* $\vec{v}$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

*Eingesetzt erhalten wir*

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3R^6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^5 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= 3R^6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned}$$

*Das erste Integral kann wieder durch trigonometrische Umformungen berechnet werden*

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) \, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

*Die Substitution* $\sin \vartheta = t$ *führt zu*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{6} t^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

*Insgesamt folgt damit*

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o} = 3R^6 \, \frac{\pi}{4} \, \frac{1}{6} = \frac{\pi R^6}{8}.$$

## 15.3 Beweis des Integralsatzes von Gauß für den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$

Durch direktes Ausrechnen wollen wir den Integralssatz von Gauß

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{v} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do$$

für den Einheitswürfel $\Omega = (0,1)^3$ im $\mathbb{R}^3$ beweisen. Wir setzen $U = (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und parametrisieren die sechs Seitenflächen $S_i$, $i = 1, \ldots, 6$, wie folgt:

$$\begin{array}{llll} S_1 : \Phi_1(u) = (1, u_1, u_2) & n = (1,0,0) & S_4 : \Phi_4(u) = (0, u_1, u_2) & n = (-1,0,0) \\ S_2 : \Phi_2(u) = (u_1, 1, u_2) & n = (0,1,0) & S_5 : \Phi_5(u) = (u_1, 0, u_2) & n = (0,-1,0) \\ S_3 : \Phi_3(u) = (u_1, u_2, 1) & n = (0,0,1) & S_6 : \Phi_6(u) = (u_1, u_2, 0) & n = (0,0,-1) \end{array}$$

Dann haben wir auf jeder Seitenfläche $\|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\| = 1$ und mit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do &= \sum_{i=1}^{6} \int_{S_i} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (v_1(1, u_1, u_2) - v_1(0, u_1, u_2)) \; du_1 du_2 \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (v_2(u_1, 1, u_2) - v_1(u_1, 0, u_2)) \; du_1 du_2 \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (v_3(u_1, u_2, 1) - v_3(u_1, u_2, 0)) \; du_1 du_2. \end{aligned}$$

Andererseits gilt durch eine geeignete Reihenfolge der Integration der einzelnen Summanden

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div} \vec{v} dx &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \; dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (v_1(1, x_2, x_3) - v_1(0, x_2, x_3)) \; dx_2 dx_3 \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (v_2(x_1, 1, x_3) - v_1(x_1, 0, x_3)) \; dx_1 dx_3 \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (v_3(x_1, x_2, 1) - v_3(x_1, x_2, 0)) \; dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Somit gilt der Integralsatz von Gauß für den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ ♣

## 15.4 Integralsatz von Gauß für dreidimensionale Pflaster

Die Idee ist die gleiche wie bei zweidimensionalen Pflastern. Dreidimensionale Pflaster sind differenzierbare Bilder von abgeschlossenen Quadern im $\mathbb{R}^3$.

**DEFINITION 15.2** $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *heißt dreidimensionales Pflaster, wenn es eine* $C^2$*-Abbildung* $h : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *einer Umgebung des abgeschlossenen Einheitswürfels* $E = [0,1]^3$ *mit folgenden Eigenschaften gibt:*

*(a)* $h$ *ist ein orientierungstreuer Diffeomorphismus* ($\det Dh > 0$) *zwischen* $(0,1)^3$ *und* $\Omega$,

*(b) für* $i = 1, \dots, 6$ *ist die Seite*

$$\Lambda_i = h \circ \Phi_i : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$$

*entweder eine Flächenparametrisierung von* $M_i := \Lambda_i((0,1)^2)$ *oder die Jacobimatrix* $d\Lambda_i$ *hat Rang* $\leq 1$. *Im letzten Fall heißt die Seite* $\Lambda_i$ *entartet.*

*(c) Treffen sich zwei nichtentartete Seiten,* $M_i \cap M_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$, *so sind die zugeordneten Parametrisierungen* $\Lambda_i$ *und* $\Lambda_j$ *entgegengesetzt orientiert, d.h. es gibt einen* $C^2$*-Diffeomorphismus* $f$ *von* $(0,1)^2$ *auf sich mit* $\Lambda_i = \Lambda_j \circ f$ *und* $\mathrm{Det}\, f < 0$.

**BEISPIEL 15.4** *Wir betrachten die "geschlitzte" Kugel vom Radius* $R$ *mit dem Mittelpunkt im Ursprung als dreidimensionales Pflaster. Hierzu verwenden wir die "Kugelkoordinaten"*

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} Ru_1 \cos 2\pi u_3 \sin \pi u_2 \\ Ru_1 \sin 2\pi u_3 \sin \pi u_2 \\ Ru_1 \cos \pi u_2 \end{pmatrix}.$$

*Die Einschränkung* $h$ *von* $\Phi$ *auf* $(0,1)^3$ *ist ein Diffeomorphismus, der wegen* $\mathrm{Det}\, h = 2\pi^2 u_1^2 R^3 \sin \pi u_2$ *orientierungstreu ist. Die Seite* $u_1 = 0$ *entspricht der entarteten Seite* $(x,y,z) = (0,0,0)$, *d.h dem Ursprung. Die gegenüberliegende Seite* $u_1 = 1$ *entspricht der Kugeloberfläche, wobei beide Pole und der Nullmeridian herausgenommen sind. Die Seite* $u_2 = 0$ *geht in den Nordpol,* $u_2 = 1$ *in den Südpol über. Die beiden Seiten* $u_3 = 0$, $u_3 = 1$ *sind miteinander verklebt und die Orientierungen entgegengesetzt.*

**DEFINITION 15.3** *Ein Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *heißt Gaußsches Gebiet, wenn der topologische Rand* $\partial\Omega$ *die Vereinigung von endlich vielen Flächenstücken* $M_1, \dots, M_m$ *und endlich vielen Kurvenstücken ist und wenn es eine Pflasterparametrisierung* $\Phi$ *von* $\Omega$ *gibt, so dass* $\partial\Phi = \{M_1, \dots, M_m\}$. *Das Randintegral wird wie folgt erklärt*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{o} := \sum_{k=1}^{m} \int_{M_k} \vec{v} \cdot d\vec{o},$$

*wobei die $M_k$ durch das äußere Einheitsnormalenfeld $\vec{n}$ orientiert ist.*

**THEOREM 15.2** *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gaußsches Gebiet und $\vec{v}$ ein $C^1$-Vektorfeld auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$, so gilt*

$$\int_\Omega div\,\vec{v}\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\vec{n}\,do.$$

*Hierbei bezeichnet $\vec{n}$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf den Randseiten von $\Omega$.*