

# Analysis I

Vorlesungsskriptum

von

L. Tobiska

Institut für Analysis und Numerik

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Wintersemester 2002/03

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mengen, Abbildungen, Mengenfamilien</b>	<b>0</b>
1.1 Mengenbegriff und Grundoperationen . . . . .	0
1.2 Produkt von Mengen . . . . .	1
1.3 Abbildungen, Einschränkungen, Ausdehnungen . . . . .	2
1.4 Bilder und Urbilder von Abbildungen . . . . .	3
1.5 Surjektive, injektive und bijektive Abbildungen . . . . .	5
1.6 Produkt von Abbildungen . . . . .	6
1.7 Vereinigung und Durchschnitt von Mengenfamilien . . . . .	7
1.8 Mächtigkeit von Mengen . . . . .	8
<b>2 Reelle Zahlen</b>	<b>10</b>
2.1 Axiome der reellen Zahlen . . . . .	10
2.2 Ordnungseigenschaften der reellen Zahlen . . . . .	11
2.3 Obere und untere Grenze . . . . .	14
<b>3 Metrische Räume</b>	<b>16</b>
3.1 Begriff des metrischen Raumes . . . . .	16
3.2 Kugeln, Sphären, Durchmesser und Abstand von Mengen . . . . .	20
3.3 Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	21
<b>4 Folgen in metrischen Räumen</b>	<b>24</b>
4.1 Konvergenzbegriff . . . . .	24
4.2 Eigenschaften konvergenter Folgen . . . . .	25
4.3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit metrischer Räume . . . . .	26
4.4 Beispiele vollständig metrischer Räume . . . . .	28
4.5 Rechenregeln für konvergente Folgen in $\mathbb{R}^s$ und $\mathbb{C}$ . . . . .	32
4.6 Spezielle Eigenschaften reeller Zahlenfolgen . . . . .	33
4.7 Einige wichtige Grenzwerte . . . . .	34
4.8 Umgebungen, Häufungs- und Berührungspunkte . . . . .	36
4.9 Limes superior and Limes inferior . . . . .	39
4.10 Vervollständigung metrischer Räume . . . . .	40
<b>5 Stetige Abbildungen</b>	<b>42</b>
5.1 Begriff der stetigen Abbildung . . . . .	42
5.2 Äquivalente Charakterisierungen der Stetigkeit . . . . .	44
5.3 Produkt stetiger Abbildungen . . . . .	45
5.4 Grenzwerte von Abbildungen . . . . .	45
5.5 Reelle vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	47
5.6 Kompaktheit . . . . .	49

<b>6</b>	<b>Spezielle Eigenschaften reeller Funktionen</b>	<b>54</b>
6.1	Monotonie und Existenz der inversen Funktion . . . . .	54
6.2	Klassifikation von Unstetigkeitsstellen . . . . .	55
6.3	Zwischenwertsätze . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Reihen in normierten Räumen</b>	<b>58</b>
7.1	Begriff des normierten Raumes . . . . .	58
7.2	Reihenbegriff . . . . .	59
7.3	Konvergenzkriterien für Reihen in normierten Räumen . . . . .	60
7.4	Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern . . . . .	61
7.5	Konvergenzkriterium für alternierende Reihen . . . . .	64
7.6	Rechenregeln für Reihen . . . . .	65
	7.6.1 Linearkombination von Reihen . . . . .	65
	7.6.2 Umordnung von Reihen . . . . .	65
	7.6.3 Multiplikation von Reihen . . . . .	68
7.7	Potenzreihen . . . . .	70
7.8	Rechenregeln für Potenzreihen . . . . .	71
	7.8.1 Linearkombination von Potenzreihen . . . . .	71
	7.8.2 Multiplikation von Potenzreihen . . . . .	72
	7.8.3 Umrechnen einer Potenzreihe . . . . .	72
	7.8.4 Identitätssatz für Potenzreihen . . . . .	73
7.9	Elementare Funktionen . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Einige Funktionenräume</b>	<b>78</b>
8.1	Raum der beschränkten Abbildungen . . . . .	78
8.2	Raum der stetigen Abbildungen . . . . .	80
8.3	Funktionenreihen . . . . .	84
8.4	Potenzreihen . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Differentialrechnung in einer Variablen</b>	<b>88</b>
9.1	Begriff der Differenzierbarkeit . . . . .	88
9.2	Mittelwertsatz . . . . .	94
9.3	Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen . . . . .	96
9.4	Zweiter Mittelwertsatz . . . . .	97
9.5	Höhere Ableitungen . . . . .	99
9.6	Konvexe Funktionen . . . . .	100
9.7	Taylorsche Formeln . . . . .	103
9.8	Lokale Extremwerttheorie . . . . .	107
9.9	Banachscher Fixpunktsatz und Anwendungen . . . . .	109

# 1 Mengen, Abbildungen, Mengenfamilien

## 1.1 Mengenbegriff und Grundoperationen

Eine Menge ist eine Gesamtheit von Objekten, die sich durch eine oder auch mehrere Eigenschaften von anderen Objekten unterscheiden. Es ist stets entscheidbar, ob ein konkretes Objekt zur Menge dazugehört oder nicht.

Mengen lassen sich charakterisieren durch

- (a) Angabe der (endlich vielen) Elemente,
- (b) Angabe einer (oder mehrerer) die Gesamtheit charakterisierenden Eigenschaft.

Beispiele, Bezeichnungen und Sprechweisen:

$x \in M$	$x$ ist Element der Menge $M$ , $x$ gehört zu $M$
$x \notin M$	$x$ ist kein Element der Menge $M$ , $x$ gehört nicht zu $M$
$M = \{a, b, c, f\}$	$M$ besteht aus den vier Elementen $a$ , $b$ , $c$ und $f$
$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$	Menge aller natürlicher Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	Menge aller positiven reellen Zahlen

Es hat sich als günstig erwiesen, auch Mengen mit nur einem bzw. keinem Element zu betrachten. Letztere heißt leere Menge und wird mit  $\emptyset$  bezeichnet.

$$M = \{x : x \text{ gerade Primzahl}\} = \{2\}$$
$$P = \{x : x \text{ ist reelle Lösung der quadratischen Gleichung } x^2 + 2x + 3 = 0\}$$

Da aus  $x^2 + 2x + 3 = 0$   $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-3}$  folgt, ist  $P = \emptyset$ .

**DEFINITION 1.1** Die Menge  $M := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$  heißt Vereinigung der Mengen  $M_1$  und  $M_2$ , in Zeichen  $M = M_1 \cup M_2$ .

**DEFINITION 1.2** Die Menge  $M := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$  heißt Durchschnitt der Mengen  $M_1$  und  $M_2$ , in Zeichen  $M = M_1 \cap M_2$ .

**DEFINITION 1.3** Die Menge  $M := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$  heißt Differenz der Mengen  $M_1$  und  $M_2$ , in Zeichen  $M = M_1 \setminus M_2$ .

**DEFINITION 1.4** Die Menge  $M_1$  heißt Teilmenge der Menge  $M_2$ , in Zeichen  $M_1 \subset M_2$ , wenn für jedes  $x \in M_1$  auch  $x \in M_2$  gilt.

Für eine beliebige Menge  $M$  gelten dann die Beziehungen  $M \subset M$  und  $\emptyset \subset M$ .

**DEFINITION 1.5** Seien  $E$  eine Menge und  $M \subset E$ . Die Menge  $C_E M := \{x \in E : x \notin M\}$  heißt Komplement der Menge  $M$  bezüglich  $E$ .

Betrachten wir folgende Teilmengen reeller Zahlen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \quad M_2 := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

$$M_1 \cup M_2 = \mathbb{R}, \quad M_1 \cap M_2 = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 2\}, \quad M_1 \setminus M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\},$$

$$C_{\mathbb{R}} M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}, \quad C_{\mathbb{R}^+} M_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}.$$

## 1.2 Produkt von Mengen

**DEFINITION 1.6** Seien  $X$  und  $Y$  zwei Mengen. Unter dem Mengenprodukt  $X \times Y$  versteht man die Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$ , in Zeichen

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Man beachte, dass das Mengenprodukt im allgemeinen nicht kommutativ ist. Für  $X = \{1, 3\}$  und  $Y = \{4, 7, 1\}$  gilt

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (3, 1), (3, 4), (3, 7)\}, \\ Y \times X &= \{(1, 1), (1, 3), (4, 1), (4, 3), (7, 1), (7, 3)\}. \end{aligned}$$

Für die Menge  $P = X \times (Y \times X)$  haben wir

$$\begin{aligned} P &= \{(1, (1, 1)), (1, (1, 3)), (1, (4, 1)), (1, (4, 3)), (1, (7, 1)), (1, (7, 3)), \\ &\quad (3, (1, 1)), (3, (1, 3)), (3, (4, 1)), (3, (4, 3)), (3, (7, 1)), (3, (7, 3))\}. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man geordnete Tripel

$$(3, 7, 1) := (3, (7, 1)) = ((3, 7), 1)$$

ein. In diesem Sinne gilt dann das Assoziativgesetz

$$X \times (Y \times X) = (X \times Y) \times X.$$

Die Verallgemeinerung dieses Konzeptes führt auf geordnete  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_i \in X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Das Produkt  $X \times Y$  einer Menge  $X$  von  $m$ -Tupeln mit einer Menge  $Y$  von  $n$ -Tupeln ist eine Menge von  $m + n$ -Tupeln. Für das  $r$ -fache Produkt von  $X$  mit sich selbst schreiben wir einfach  $X^r$ .

Die Menge  $\mathbb{R}^n$  aller  $n$ -Tupel reeller Zahlen kann geometrisch als Menge aller Punkte auf der Zahlengerade ( $n = 1$ ), als Menge aller Punkte in der Ebene ( $n = 2$ ) bzw. als Menge aller Punkte im Raum ( $n = 3$ ) interpretiert werden. Ein  $n$ -Tupel reeller Zahlen entspricht genau einem Punkt im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  (vgl. Vorlesung Lineare Algebra).

### 1.3 Abbildungen, Einschränkungen, Ausdehnungen

**DEFINITION 1.7** Seien  $X$  und  $Y$  zwei Mengen. Eine Teilmenge  $F$  von  $X \times Y$  heißt genau dann eine Abbildung von  $X$  in  $Y$  (oder eine auf  $X$  definierte Funktion mit Werten in  $Y$ ), wenn es zu jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  derart gibt, dass  $(x, y) \in F$  gilt.  $X$  heißt Definitionsbereich,  $Y$  Zielbereich.

Für  $(x, y) \in F$  schreibt man häufig auch  $y = F(x)$ . Die Abbildung wird durch  $F : X \rightarrow Y$  und die Angabe der Abbildungsvorschrift  $y = F(x)$  charakterisiert. Es ist grundsätzlich zu unterscheiden zwischen der Abbildung  $F$  (einer Teilmenge von  $X \times Y$ ) und der Menge aller Funktionswerte  $\{F(x) : x \in X\}$  (einer Teilmenge von  $Y$ ).

**Beispiel 1.1** Seien  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  und  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ . Dann sind  $X \times Y$  die Menge aller Punkte in der  $xy$ -Ebene und  $F$  die Menge aller Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung  $(0, 0)$  und Radius  $a$ .  $F$  ist zwar Teilmenge von  $X \times Y$ , aber keine Abbildung, da

- (a) es Punkte  $x \in X$  gibt, zu denen kein  $y \in Y$  existiert mit  $(x, y) \in F$ , z.B.  $x = 2a$ ,
- (b) es Punkte  $x \in X$  gibt, zu denen mehr als ein  $y \in Y$  existiert mit  $(x, y) \in F$ , z.B. ist für  $x = 0$  sowohl  $(0, a) \in F$  als auch  $(0, -a) \in F$ .

**Beispiel 1.2** Seien  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$  und  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ . In diesem Beispiel ist  $F$  Abbildung von  $X$  in  $Y$ .

**Beispiel 1.3** Die Menge  $X \subset \mathbb{R}^3$  umfasse alle Punkte im Innern eines wärmeleitenden Mediums und sei  $Y = \mathbb{R}$ . Wir ordnen jedem Raumpunkt  $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$  eine örtlich gemittelte Temperatur  $y$  zu, also

$$y = F(x) = F(x_1, x_2, x_3) \iff (x, y) \in F.$$

Dann ist  $F$  eine Abbildung von  $X$  in  $Y$ , in Zeichen  $F : X \rightarrow Y$ . Auch hier beachte man den Unterschied zwischen dem Temperaturwert  $F(x)$  in  $x$  und der Temperaturverteilung  $F$ .

**LEMMA 1.1** Seien  $A \subset X$  eine Teilmenge von  $X$  und  $F : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $X$  in  $Y$ . Dann ist  $F \cap (A \times Y)$  eine Abbildung von  $A$  in  $Y$ .

**Beweis:**

- (i)  $F \cap (A \times Y)$  ist eine Teilmenge von  $A \times Y$ .
- (ii) Zu jedem  $x \in A \subset X$  gibt es genau ein  $y \in Y$  derart, dass  $(x, y) \in F$ . Nach Konstruktion ist auch  $(x, y) \in A \times Y$ .

**DEFINITION 1.8** Seien  $A \subset X$  und  $F : X \rightarrow Y$ . Die Abbildung  $F \cap (A \times Y)$  heißt Einschränkung von  $F$  auf  $A$ , in Zeichen  $F|_A$ .

**DEFINITION 1.9** Unter der Ausdehnung einer Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  auf die Menge  $B \supset X$  verstehen wir eine Abbildung  $\tilde{F} : B \rightarrow Y$ , deren Einschränkung auf  $X$  mit  $F$  übereinstimmt.

**Beachte:** Die Einschränkung  $F|_A$  einer Abbildung  $F$  von  $X$  in  $Y$  auf  $A$  ist eindeutig bestimmt. Es gibt mehrere Ausdehnungen  $\tilde{F}$  ein und derselben Abbildung  $F : X \rightarrow Y$ .

**Beispiel 1.4** Seien  $X = \mathbb{R}^+$ ,  $Y = \mathbb{R}$  und  $F : X \rightarrow Y$  durch die Zuordnungsvorschrift  $y = F(x) = x^2$  gegeben. Die Einschränkung von  $F$  auf  $\mathbb{N}$  ordnet jeder natürlichen Zahl ihre Quadratzahl zu. Zwei Ausdehnungen von  $F$  auf  $B = \mathbb{R}$  sind durch

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(x) &:= \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \\ \tilde{F}_2(x) &:= \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq -2 \\ 0 & \text{für } x < -2 \end{cases}\end{aligned}$$

gegeben.

## 1.4 Bilder und Urbilder von Abbildungen

Seien  $F : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $X$  in  $Y$  und  $A$  eine Teilmenge von  $X$ .

**DEFINITION 1.10** Die Menge

$$F(A) := \{y \in Y : \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = F(x)\}$$

heißt Bild von  $A$  unter der Abbildung  $F$ .

**LEMMA 1.2** Es gelten folgende Aussagen:

(a) Für jedes  $x \in X$  gilt  $F(\{x\}) = \{F(x)\}$ .

(b) Aus  $A \subset B$  folgt  $F(A) \subset F(B)$ .

(c) Für beliebige Mengen  $A \subset X$  und  $B \subset X$  gilt

$$F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B).$$

(d) Für beliebige Mengen  $A \subset X$  und  $B \subset X$  gilt

$$F(A \cup B) = F(A) \cup F(B).$$

**Beweis:**

Wir weisen exemplarisch die Eigenschaft (c) nach. Sei  $y$  im Bild von  $A \cap B$  unter  $F$  enthalten. Dann existiert ein  $x \in A \cap B$  mit  $y = F(x)$ . Da  $x$  im Durchschnitt von  $A$  und  $B$  liegt, ist  $x \in A$  und  $x \in B$  und somit  $y = F(x) \in F(A)$  und  $y = F(x) \in F(B)$ . Folglich liegt  $y$  im Durchschnitt der Bilder  $F(A)$  und  $F(B)$ .

**Beispiel 1.5** Im allgemeinen gilt in der Aussage (c) nicht das Gleichheitszeichen. Betrachten wir hierzu die durch die Zuordnungsvorschrift  $F(x) = x^2$  gegebene Abbildung  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die Menge  $A := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  und  $B = \mathbb{R}^+$ . Wegen  $A \cap B = \emptyset$  folgt  $F(A \cap B) = \emptyset$ . Andererseits schließen wir aus  $F(A) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  und  $F(B) = \mathbb{R}^+$  für den Durchschnitt der Bilder  $F(A) \cap F(B) = \mathbb{R}^+$ .

**DEFINITION 1.11** Die Menge

$$F^{-1}(B) := \{x \in X : F(x) \in B\}$$

heißt Urbild von  $B$  unter der Abbildung  $F$ .

**Beispiel 1.6**  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  entspreche der Temperaturverteilung in einem Würfel  $W \subset \mathbb{R}^3$ . Ist  $B$  ein vorgegebener Temperaturbereich, etwa  $B = \{y \in \mathbb{R} : -10 \leq y < 30\}$ , so ist das Urbild  $F^{-1}(B)$  von  $B$  unter  $F$  die Menge aller Punkte des Würfels, die im vorgegebenen Temperaturbereich liegen. Zur Visualisierung von berechneten Temperaturfeldern  $F$  werden oft im Schnitt eines Bauteils verschiedene Temperaturbereiche durch unterschiedliche Farben auf dem Bildschirm dargestellt. Um die entsprechenden Bereiche einfärben zu können, sucht man gerade die Urbilder der Temperaturbereiche unter der Abbildung  $F$ .

**LEMMA 1.3** Es gelten folgende Aussagen:

- (a)  $F^{-1}(A) = F^{-1}(A \cap F(X))$ .
- (b) Aus  $A \subset B$  folgt  $F^{-1}(A) \subset F^{-1}(B)$ .
- (c)  $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$ .
- (d)  $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$ .
- (e) Für  $B \subset Y$  gilt  $F(F^{-1}(B)) = B \cap F(X)$ .
- (f) Für  $A \subset X$  gilt  $F^{-1}(F(A)) \supset A$ .

**Beweis:**

Wir weisen exemplarisch die Aussage (f) nach. Sei  $x \in A \subset X$ . Dann ist  $y = F(x) \in F(A)$ . Nach Definition des Urbildes der Menge  $F(A)$  gehört  $x$  zu  $F^{-1}(F(A))$ .

Man beachte, dass im allgemeinen in der Aussage (f) nicht das Gleichheitszeichen steht. Sei etwa  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Zuordnungsvorschrift  $F(x) = x^2$  definiert. Für  $A = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  ist  $F(A) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  und  $F^{-1}(F(A)) = \mathbb{R}$ .



## 1.5 Surjektive, injektive und bijektive Abbildungen

Sei  $F : X \rightarrow Y$  eine Abbildung von  $X$  in  $Y$ .

**DEFINITION 1.12**  $F : X \rightarrow Y$  heißt *surjektiv* (oder *Abbildung von  $X$  auf  $Y$* ), wenn  $Y$  das Bild von  $X$  unter  $F$  ist, in Zeichen  $F(X) = Y$ .

**DEFINITION 1.13**  $F : X \rightarrow Y$  heißt *injektiv* (oder *eindeutig*), wenn aus  $F(x_1) = F(x_2)$  die Gleichheit  $x_1 = x_2$  folgt.

**DEFINITION 1.14**  $F : X \rightarrow Y$  heißt *bijektiv* (oder *umkehrbar eindeutig*), falls  $F$  surjektiv und injektiv ist.

**Beispiel 1.7** Seien  $X = Y = \mathbb{R}$  und  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ .  $F$  ist nicht surjektiv, denn  $F(X) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R} = Y$ .  $F$  ist auch nicht injektiv, denn beispielsweise ist  $F(-1) = F(+1)$ .

**Beispiel 1.8** Seien  $X = Y = \mathbb{R}^+$  und  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x\}$ . Für jedes  $x \in X$  gilt  $F(x) = \sqrt{x}$ . Aus  $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$  folgt  $x_1 = x_2$ , also ist  $F$  injektiv. Ferner gilt  $F(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ , folglich ist  $F$  surjektiv und damit auch bijektiv.

**Beispiel 1.9** Seien  $X = Y = \mathbb{R}$  und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Zuordnungsvorschrift  $F(x) = \exp(x)$  gegeben.  $F$  ist injektiv, denn aus  $\exp(x_1) = \exp(x_2)$  folgt  $\exp(x_1 - x_2) = 1$ , also  $x_1 - x_2 = 0$  bzw.  $x_1 = x_2$ .  $F$  ist aber nicht surjektiv, da das Bild von  $\mathbb{R}$  unter  $F$   $\mathbb{R}^+$  ist. Die Abbildung  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $G(x) = F(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist aber surjektiv, da der Zielbereich von  $F$  auf das Bild von  $X$  unter  $F$  eingeschränkt wurde.

**THEOREM 1.1** Die Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  sei bijektiv und die Teilmenge  $G$  von  $Y \times X$  definiert durch

$$G := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in F\}.$$

Dann ist  $G$  eine bijektive Abbildung von  $Y$  auf  $X$ .

**Beweis:**

Da  $F$  surjektiv ist, gibt es zu jedem  $y \in Y$  mindestens ein  $x \in X$  mit  $(x, y) \in F$  bzw.  $(y, x) \in G$ . Diese  $x$  ist infolge der Injektivität von  $F$  eindeutig bestimmt, denn aus  $y = F(x_1) = F(x_2)$  folgt  $x_1 = x_2$ . Damit ist  $G$  eine Abbildung von  $Y$  in  $X$ . Nun folgt aus  $G(y_1) = G(y_2) = x$  die Beziehungen  $(x, y_1) \in F$  und  $(x, y_2) \in F$ , also  $y_1 = y_2$ , d.h.  $G$  ist injektiv.  $G$  ist auch surjektiv, denn zu jedem  $x \in X$  existiert ein  $y \in Y$  derart, dass  $(x, y) \in F$  oder gleichbedeutend  $(y, x) \in G$ .

**DEFINITION 1.15** Die nach Theorem 1.1 existierende bijektive Abbildung  $G$  heißt die zu  $F$  inverse Abbildung, in Zeichen  $G = F^{-1}$ .

**Bemerkung:** Die eingeführte Notation  $F^{-1}$  kann für bijektive Abbildungen  $F : X \rightarrow Y$  zweifach interpretiert werden, insbesondere ist für eine Teilmenge  $B \subset Y$   $F^{-1}(B)$

- (a) das Bild von  $B$  unter der inversen Abbildung  $F^{-1} : Y \rightarrow X$  oder
- (b) das Urbild von  $B$  unter der Abbildung  $F : X \rightarrow Y$ .

Da für bijektive Abbildungen  $F : X \rightarrow Y$  beide Mengen übereinstimmen, sind jedoch Missverständnisse ausgeschlossen.

## 1.6 Produkt von Abbildungen

Liegt der Zielbereich einer Abbildung im Definitionsbereich einer weiteren Abbildung, kann man beide Abbildungen hintereinander ausführen.

**DEFINITION 1.16** Seien  $X, Y$  und  $Z$  nichtleere Mengen,  $F : X \rightarrow Y$  und  $G : Y \rightarrow Z$  Abbildungen von  $X$  in  $Y$  bzw. von  $Y$  in  $Z$ . Dann definiert die Zuordnungsvorschrift  $x \rightarrow H(x) = G(F(x))$  für jedes  $x \in X$  eine Abbildung  $H : X \rightarrow Z$ , das Produkt der Abbildungen  $F$  und  $G$ , in Zeichen  $H = G \circ F$ .

**LEMMA 1.4** Für das Produkt  $H = G \circ F$  gelten folgende Aussagen:

- (a)  $H(A) = G(F(A))$  für jede Menge  $A \subset X$ ,
- (b)  $H^{-1}(B) = F^{-1}(G^{-1}(B))$  für jede Menge  $B \subset Z$ .

**Beweis:**

Exemplarisch sei (b) gezeigt. Sei  $x$  ein Element des Urbildes von  $B$  unter  $H$ . Dann gilt  $H(x) = G(F(x)) \in B$ . Für  $y := F(x) \in Y$  gilt dann sowohl  $y \in G^{-1}(B) =: A$ , als auch  $x \in F^{-1}(A)$ . Somit gilt zunächst  $H^{-1}(B) \subset F^{-1}(G^{-1}(B))$ . Für die Umkehrung sei wieder die Abkürzung  $A = G^{-1}(B)$  eingeführt. Ist nun  $x \in F^{-1}(A)$ , so gibt es ein  $y = F(x) \in A$  bzw.  $y \in G^{-1}(B)$ . Dies bedeutet, dass  $G(y) = G(F(x)) = H(x)$  in  $B$  liegt. Folglich ist  $x \in H^{-1}(B)$ .

## 1.7 Vereinigung und Durchschnitt von Mengenfamilien

**DEFINITION 1.17** Sei  $X$  eine (Grund-) Menge und  $\Lambda$  eine nichtleere Indexmenge. Jedem  $\lambda \in \Lambda$  sei eine Teilmenge  $A_\lambda \subset X$  zugeordnet. Die Gesamtheit der  $A_\lambda$  heißt Mengenfamilie, in Zeichen  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

**DEFINITION 1.18** Die Menge

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \in X : \exists \lambda \in \Lambda \text{ mit } x \in A_\lambda\}$$

heißt Vereinigung der Mengenfamilie  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . Die Menge

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \in X : x \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda\}$$

heißt Durchschnitt der Mengenfamilie  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

Für eine zweielementige Indexmenge ist die Vereinigung bzw. der Durchschnitt der Mengenfamilie mit dem bereits eingeführten Begriff der Vereinigung bzw. des Durchschnittes zweier Mengen identisch. Die obige Definition verallgemeinert damit die Begriffe auf den Fall beliebig vieler Mengen.

**LEMMA 1.5** *Es gelten die folgenden Aussagen*

$$\begin{aligned} C_X \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (C_X A_\lambda), \\ \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) &= \bigcup_{(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega} (A_\lambda \cap B_\omega), \\ \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cup \left( \bigcap_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) &= \bigcap_{(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega} (A_\lambda \cup B_\omega). \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir zeigen exemplarisch die zweite Eigenschaft. Sei

$$x \in \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$x \in \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \quad \text{und} \quad x \in \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right).$$

Folglich existieren Indizes  $\lambda_0 \in \Lambda$  und  $\omega_0 \in \Omega$ , mit  $x \in A_{\lambda_0}$  und  $x \in B_{\omega_0}$ , so dass  $x \in A_{\lambda_0} \cap B_{\omega_0}$ . Da das geordnete Paar  $(\lambda_0, \omega_0)$  zu  $\Lambda \times \Omega$  gehört, ist  $x \in \bigcup_{(\lambda, \omega) \in \Lambda \times \Omega} (A_\lambda \cap B_\omega)$ .

## 1.8 Mächtigkeit von Mengen

**DEFINITION 1.19** *Eine Menge  $X$  heißt einer Menge  $Y$  gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung  $F$  von  $X$  auf  $Y$  gibt.*

Da die inverse Abbildung  $F^{-1}$  der bijektiven Abbildung  $F$  bijektiv ist und  $Y$  auf  $X$  abbildet, ist auch  $Y$  der Menge  $X$  gleichmächtig. Endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente haben. In diesem Sinne ist der Begriff Mächtigkeit eine gewisse Verallgemeinerung des Begriffes Anzahl. Cantor verfolgte konsequent diesen Gedanken, was zur Brechung zahlreicher Dogmen seiner Zeit führte:

*Der Teil ist weniger als das Ganze.*

**Beispiel 1.10** Betrachte die Menge  $\mathbb{N}$  aller natürlichen Zahlen und deren Teilmenge  $A$  aller geraden Zahlen. Die Abbildung  $F : \mathbb{N} \rightarrow A$  mit  $F(n) = 2n$  ist bijektiv, also ist die echte Teilmenge der geraden Zahlen der Menge aller natürlichen Zahlen gleichmächtig.

**DEFINITION 1.20** Eine Menge  $X$  heißt abzählbar, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Welche Mächtigkeit kann eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{N}$  haben? Beispiele zeigen, dass  $A$  endlich oder  $\mathbb{N}$  gleichmächtig sein kann. Gibt es weitere Möglichkeiten? Antwort gibt

**THEOREM 1.2** Jede nichtleere Teilmenge  $A \subset \mathbb{N}$  ist endlich oder abzählbar.

**Beweis:** Besteht  $A$  aus endlich vielen Elementen, so ist nichts zu zeigen.  $A$  habe nun unendlich viele Elemente.

$x_1$  sei kleinstes Element von  $A$   
 $x_2$  sei kleinstes Element von  $A \setminus \{x_1\}$   
 $\dots$   
 $x_n$  sei kleinstes Element von  $A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$   
 $\dots$

Wir betrachten nun die Abbildung  $F : \mathbb{N} \rightarrow A$  mit  $F(n) = x_n$ .

1.  $F$  ist injektiv, d.h.  $F(n) \neq F(m) \quad \forall n \neq m$ , denn für  $m > n$  ist  $x_m \in A \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$  aber  $x_n \notin A \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ .
2.  $F$  ist surjektiv, d.h. zu jedem Element  $a \in A$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_n = a = F(n)$ . Nach Konstruktion gilt  $x_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $a \in A$  beliebig, dann gilt insbesondere  $x_a \geq a$ . Ist  $m$  die größte ganze Zahl, für die  $x_m < a$ , so muss  $x_{m+1} = a$  gelten.

Die Frage ist, wie der Begriff  $B$  mächtiger als  $A$  genau zu fassen ist.

**DEFINITION 1.21** Seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen, es existiere eine bijektive Abbildung von  $A$  auf eine (echte) Teilmenge von  $B$  aber es existiere keine bijektive Abbildung von  $A$  auf  $B$ . Dann heißt die Menge  $B$  mächtiger als die Menge  $A$ .

**THEOREM 1.3** *Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge.*

**Beweis:** Wählt man  $x_1 \in A$  beliebig, so ist die Restmenge  $A \setminus \{x_1\}$  unendlich. Wir wählen  $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$  und die Restmenge ist erneut unendlich, usw.

Damit besitzen abzählbare Mengen die kleinstmögliche Mächtigkeit unendlicher Mengen.

**BEMERKUNG 1.1** *Eine unterhaltsame Geschichte über die Mächtigkeit von Mengen ist: Das ungewöhnliche Hotel oder die eintausendunderste Reise des John Tichy. In: N.J. Wilenkin. Unterhaltsame Mengenlehre. S.65-74.*

Fragen: Gibt es (unendliche) Mengen deren Mächtigkeit größer als die der natürlichen Zahlen ist? Gibt es Mengen größter Mächtigkeit?

Seien  $A$  eine Menge gegebener Mächtigkeit und  $B$  die Menge aller Abbildungen  $F : A \rightarrow \{0, 1\}$ . Dann gilt:

(i)  $B$  ist mindestens so mächtig wie  $A$ .

Wir betrachten die Abbildung  $\Phi : A \rightarrow B$ , die durch

$$\Phi(a) = F^a \in B \quad \text{mit} \quad F^a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

Man stellt fest, dass  $\Phi$  injektiv ist. Damit ist  $\tilde{\Phi} : A \rightarrow \Phi(A)$  mit

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in A$$

eine bijektive Abbildung von  $A$  auf eine Teilmenge von  $B$ .

(ii)  $A$  und  $B$  sind nicht gleichmächtig. Angenommen, es gebe eine bijektive Abbildung  $\Psi : A \rightarrow B$ . Für jedes  $x \in A$  ist dann  $\Psi(x) = F_x \in B$ . Betrachten wir nun

$$\phi(x) := 1 - F_x(x).$$

Es sind  $\phi \in B$  und  $\Psi : A \rightarrow B$  bijektiv. Also gibt es ein  $b \in A$  mit  $\Psi(b) = F_b(\cdot) = \phi$ . Damit gilt für alle  $x \in A$   $F_b(x) = \phi(x) = 1 - F_b(x)$ , insbesondere für  $x = b$

$$F_b(b) = 1 - F_b(b) \quad \Rightarrow \quad F_b(b) = \frac{1}{2},$$

im Widerspruch zur Definition der Menge  $B$ .

**THEOREM 1.4** *Es gibt keine Menge maximaler Mächtigkeit.*

## 2 Reelle Zahlen

### 2.1 Axiome der reellen Zahlen

Ausgehend von der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  führt die Forderung der Ausführbarkeit der Subtraktion zur Menge der ganzen Zahlen, die Ausführbarkeit der Division zu den rationalen Zahlen und die Ausführbarkeit des Wurzelziehens aus nichtnegativen rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen (irrationale und rationale Zahlen).

Wir beschränken uns hier mit einer axiomatischen Einführung der reellen Zahlen. Man kann sie auch aus Axiomen der Mengenlehre ableiten. Hierfür sei auf die Literatur, z.B. Landau: Grundlagen der Analysis. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930, verwiesen.

**DEFINITION 2.1** *Der Körper der reellen Zahlen ist eine Menge  $\mathbb{R}$ , für die zwei Abbildungen  $(x, y) \rightarrow x + y$  und  $(x, y) \rightarrow xy$  von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  und eine Relation  $x \leq y$  (auch  $y \geq x$  geschrieben) zwischen Elementen von  $\mathbb{R}$  definiert sowie die folgenden vier Gruppen von Axiomen erfüllt sind:*

1. Die Menge  $\mathbb{R}$  ist ein Körper.

- (a)  $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,
- (c) es gibt ein Element  $0 \in \mathbb{R}$  derart, dass  $0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,
- (d) zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ein Element  $-x \in \mathbb{R}$  derart, dass  $x + (-x) = 0$ ,
- (e)  $x(yz) = (xy)z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ,
- (f)  $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,
- (g) es gibt ein Element  $1 \neq 0$  in  $\mathbb{R}$  derart, dass  $1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,
- (h) zu jedem  $x \neq 0$  in  $\mathbb{R}$  gibt es ein Element  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  (auch  $1/x$  geschrieben) derart, dass  $xx^{-1} = 1$ ,
- (i)  $x(y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

2. Die Menge  $\mathbb{R}$  ist ein geordneter Körper.

- (a) Aus  $x \leq y$  und  $y \leq z$  folgt  $x \leq z$ ,
- (b) die Aussage ( $x \leq y$  und  $y \leq x$ ) ist äquivalent mit  $x = y$ ,
- (c) für je zwei Elemente  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ ,
- (d) aus  $x \leq y$  folgt  $x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ ,
- (e) aus  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$  folgt  $0 \leq xy$ .

Die Relation ( $x \leq y$  und  $x \neq y$ ) wird  $x < y$  oder  $y > x$  geschrieben. Sind  $a, b$  Elemente von  $\mathbb{R}$  mit  $a < b$ , so nennt man

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall} \\ [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \end{aligned}$$

mit dem Anfangspunkt  $a$  und dem Endpunkt  $b$ .

3. Die Menge  $\mathbb{R}$  ist ein archimedisch geordneter Körper, d.h., es gilt das archimedische Axiom:  
Zu jedem Paar  $x, y$  reeller Zahlen mit  $0 < x$ ,  $0 \leq y$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  derart, dass  $y \leq nx$ .
4. Die Menge  $\mathbb{R}$  genügt dem Intervallschachtelungsaxiom.  
Sind bei einer Folge  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Intervalle für jedes  $n$  die Bedingungen  $a_n \leq a_{n+1}$  und  $b_{n+1} \leq b_n$  erfüllt, so ist der Durchschnitt dieser Folge nicht leer.

## 2.2 Ordnungseigenschaften der reellen Zahlen

**LEMMA 2.1** Für jedes Paar reeller Zahlen  $x, y$  gilt genau eine der drei Relationen  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $x > y$ .

**Beweis.** Für  $x \neq y$  kann  $x < y$  und  $x > y$  nicht gleichzeitig gelten.

**LEMMA 2.2** Die Beziehungen ( $x \leq y$  und  $y < z$ ) und ( $x < y$  und  $y \leq z$ ) ziehen beide die Beziehung  $x < z$  nach sich.

**Beweis.** Zunächst folgt in beiden Fällen  $x \leq z$ . Angenommen, dass  $x = z$  gilt. Dann ist aber  $x \leq y$  und  $y < x$  (oder  $x < y$  und  $y \leq x$ ) im Widerspruch zu obigem Lemma.

**LEMMA 2.3** Genügen die  $2n$  Zahlen  $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$  für jedes  $i$  der Bedingung  $x_i \leq y_i$ , so ist

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i.$$

Gilt zusätzlich  $x_i < y_i$  für wenigstens einen Index  $i$ , so ist

$$\sum_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n y_i.$$

**Beweis.** Aus den Axiomen folgt zunächst die Richtigkeit für  $n = 2$

$$x_1 + x_2 \leq y_1 + x_2 \leq y_1 + y_2.$$

Ferner folgt aus  $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$  auch  $x_1 + x_2 = y_1 + x_2 = y_1 + y_2$ , also  $x_1 = y_1$  und  $x_2 = y_2$ , d.h., die zweite Behauptung für  $n = 2$ . Die Richtigkeit des Lemma für mehr als zwei Summanden folgt nun durch vollständige Induktion.

**Spezialfall:** Sind  $x_1, \dots, x_n$  nichtnegativ, so gilt dies auch für  $x_1 + \dots + x_n$ . Ferner ist  $x_1 + \dots + x_n > 0$ , außer im Fall  $x_1 = \dots = x_n = 0$ .

**LEMMA 2.4** Die Relation  $x \leq y$  ist äquivalent mit  $x + z \leq y + z$ . Diese Behauptung gilt auch, wenn  $\leq$  durch  $<$  ersetzt wird.

**Beweis.** Aus  $x \leq y$  folgt bereits  $x + z \leq y + z$  (Axiom 2(d)). Sei umgekehrt  $x + z \leq y + z$ . Dann folgt durch Addition mit  $(-z)$  auch

$$x = x + z + (-z) \leq y + z + (-z) = y.$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Äquivalenz von  $x = y$  zu  $x + z = y + z$ .

**Spezialfälle:** Setzt man nacheinander  $z = -x$ ,  $z = -y$  und  $z = -x + (-y)$ , erhält man die Äquivalenz der Relationen

$$x \leq y, \quad 0 \leq y - x, \quad x - y \leq 0, \quad -y \leq -x.$$

Analoges gilt, wenn man  $\leq$  durch  $<$  ersetzt.

Für jede reelle Zahl  $x$  definieren wir den absoluten Betrag von  $x$  durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Ferner seien der positive Teil und negative Teil von  $x$  durch

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

bezeichnet, so dass  $x = x^+ - x^-$  und  $|x| = x^+ + x^-$  gelten.

**LEMMA 2.5** Ist  $a > 0$ , so ist die Relation  $|x| \leq a$  äquivalent mit  $-a \leq x \leq a$ , die Relation  $|x| < a$  äquivalent mit  $-a < x < a$ .

**Beweis.** Im Fall  $x \geq 0$  haben wir  $0 \leq x = |x| \leq a$  oder  $0 \leq x = |x| < a$ . Im anderen Fall gilt für  $x < 0$  die Beziehung  $-x = |x| \leq a$ , d.h.,  $-a \leq x < 0$ , oder  $-x = |x| < a$ , d.h.,  $-a < x < 0$ .



**LEMMA 2.6** (Dreiecksungleichung) Für jedes Paar reeller Zahlen  $x, y$  gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{und} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

**Beweis.** Die erste Beziehung ist für  $x, y \geq 0$  oder für  $x, y < 0$  offensichtlich. Für unterschiedliches Vorzeichen, etwa  $x \leq 0 < y$  ist

$$x + y \leq y \leq y + |x| = |x| + |y| \quad \text{und} \quad x + y \geq x \geq x - |y| = -|x| - |y|.$$

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, denn wegen

$$\begin{aligned} |x| &= |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y| \\ |y| &= |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| \end{aligned}$$

ist

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

**FOLGERUNG 2.1** Durch vollständige Induktion erhalten wir

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

**LEMMA 2.7** Ist  $z \geq 0$ , so folgt aus  $x \leq y$  die Beziehung  $xz \leq yz$ . Aus  $x \leq 0$  und  $y \geq 0$  folgt  $xy \leq 0$ , aus  $x \leq 0$  und  $y \leq 0$  folgt  $xy \geq 0$ . Gleiche Beziehungen gelten bei der Ersetzung von  $\leq$  durch  $<$ . Insbesondere ist  $x^2 \geq 0$  für jede reelle Zahl  $x$  und  $x^2 > 0$  außer für  $x = 0$ .

**Beweis.** Einfache Anwendung der Axiome und Folgerungen.

**LEMMA 2.8** Für  $x > 0$  ist  $x^{-1} > 0$ . Für  $z > 0$  ist  $x \leq y$  mit  $xz \leq yz$  äquivalent. Die Beziehung  $0 < x < y$  ist mit  $0 < y^{-1} < x^{-1}$  äquivalent.

**Beweis.** Die erste Behauptung folgt wegen  $xx^{-1} = 1 > 0$ . Die zweite folgt mit  $x = (xz)z^{-1}$  aus der ersten. Die dritte Behauptung ist die Folge der zweiten.

Reelle Zahlen der Form  $\pm r/s$ , wobei  $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $s \in \mathbb{N}$ , werden rationale Zahlen genannt.

**THEOREM 2.1** Die Menge  $\mathbb{Q}$  aller rationalen Zahlen ist abzählbar.

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, dass die Menge aller positiven rationalen Zahlen abzählbar ist. Da die Vereinigung der abzählbaren Mengen  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$  und  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^-$  wieder abzählbar ist, folgt hieraus die Behauptung. Wir betrachten die surjektive Abbildung  $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$  mit  $\Phi(m, n) := m/n$ . Wir schränken nun  $\Phi$  auf eine geeignete Teilmenge von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ein, so dass die Einschränkung surjektiv und injektiv ist. Da  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist (Diagonalverfahren), ist diese Teilmenge höchstens abzählbar (wegen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$  abzählbar).

**THEOREM 2.2** Die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen ist nicht abzählbar.

**Beweis.** Siehe beispielsweise Dieudonné Kap. 2.

## 2.3 Obere und untere Grenze

**DEFINITION 2.2** Eine reelle Zahl  $b \in \mathbb{R}$  heißt obere (untere) Schranke einer Menge  $X$  reeller Zahlen, wenn  $x \leq b$  ( $b \leq x$ ) für jedes  $x \in X$  gilt.

**DEFINITION 2.3** Eine Menge  $X \subset \mathbb{R}$  heißt nach oben beschränkt (nach unten beschränkt), wenn die Menge der oberen (unteren) Schranken nicht leer ist. Eine Menge  $X$  reeller Zahlen, die nach oben und unten beschränkt ist, heißt beschränkt.

**THEOREM 2.3** Ist eine nichtleere Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}$  nach oben (nach unten) beschränkt, so besitzt die Menge aller oberen Schranken  $M$  ein kleinstes Element (unteren Schranken ein größtes Element).

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall einer nach oben beschränkten Menge. Der Beweis im Fall einer nach unten beschränkten Menge ist analog.

1. Konstruktion einer Intervallschachtelung.

Seien  $a \in X$  und  $b \in M$ , d.h.,  $a \leq b$ .  $\mathbb{R}$  ist archimedisch geordnet, also finden wir zu  $b - a \geq 0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$  ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $m \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq b - a$ . Dies bedeutet, dass  $a + m \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq b$  eine obere Schranke für die Menge  $X$  ist. Wir verkleinern diese obere Schranke und bezeichnen mit  $p_n$  die kleinste natürliche Zahl  $m$ , für die  $a + m \left(\frac{1}{2}\right)^n$  (noch) eine obere Schranke von  $X$  ist. Wir betrachten nun die Folge abgeschlossener Intervalle

$$I_n = \left[ a + (p_n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n, a + p_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir stellen zunächst fest, dass  $I_n \cap X \neq \emptyset$ , denn im Fall  $p_n = 1$  gehört zumindest  $a$  zum Durchschnitt und für  $p_n > 1$  folgt aus  $I_n \cap X = \emptyset$ , dass  $a + (p_n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$  eine obere Schranke von  $X$  ist, im Widerspruch zur Definition von  $p_n$ . Wegen

$$p_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = (2p_n) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

folgt  $p_{n+1} \leq 2p_n$ . Nun war

$$a + (p_n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = a + (2p_n - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

keine obere Schranke von  $X$ , also gilt  $p_{n+1} > 2p_n - 2$ . Damit kann  $p_{n+1}$  nur  $2p_n$  oder  $2p_n - 1$  sein. Somit haben wir eine Intervallschachtelung  $I_{n+1} \subset I_n$ .

2. Es gibt nur eine reelle Zahl  $\gamma \in \mathbb{R}$  mit  $\gamma \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ .

Angenommen es gibt zwei reelle Zahlen  $\alpha, \beta$  mit  $\alpha < \beta$ , die im Durchschnitt der  $I_n$  liegen. Dann gehört auch  $[\alpha, \beta]$  zu allen Intervallen  $I_n$ , insbesondere gilt dann  $\beta - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  bzw.  $2^n(\beta - \alpha) \leq 1$ . Da jedoch  $2^n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dies ein Widerspruch zur archimedischen Ordnung von  $\mathbb{R}$ .

3. Die Zahl  $\gamma$  ist obere Schranke von  $X$ .  
 Angenommen es gäbe ein  $x \in X$  mit

$$x > \gamma \geq a + (p_n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nach dem archimedischen Axiom gibt es dann eine natürliche Zahl  $n^*$ , für die  $(x - \gamma)2^{n^*} > 1$  ist. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$x > \gamma + \left(\frac{1}{2}\right)^{n^*} \geq a + p_{n^*} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^*}$$

im Widerspruch zur Definition von  $p_n$ .

4. Die Zahl  $\gamma$  ist die kleinste aller oberen Schranken.  
 Angenommen, es gäbe eine kleinere obere Schranke  $y < \gamma$  von  $X$ . Dann gibt es nach dem archimedischen Axiom eine natürliche Zahl  $n$  für die  $(\gamma - y)2^n > 1$  gilt. Hieraus folgt

$$a + p_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \gamma > y + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

d.h.,

$$y < a + (p_n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

im Widerspruch zu  $y$  ist obere Schranke von  $X$ .

**DEFINITION 2.4** Für eine nach oben beschränkte Menge  $X$  reeller Zahlen bezeichnet  $\sup X$  das kleinste Element der Menge aller oberen Schranken von  $X$ . Entsprechend wird für eine nach unten beschränkte Menge  $X$  reeller Zahlen das größte Element der Menge aller unteren Schranken mit  $\inf X$  bezeichnet.

### 3 Metrische Räume

In diesem Abschnitt treten wir in die eigentliche Welt der Analysis ein, die zu einem wesentlichen Teil auf dem Begriff der Konvergenz aufgebaut ist. Das Konzept der Konvergenz erlaubt uns in gewissem Sinne, unendlich viele (Rechen-) Operationen durchzuführen, ein wesentlicher Unterschied zur Algebra. Präzisiert man die naiv-anschaulichen Vorstellungen von Häufungspunkten und konvergenten (Zahlen-)Folgen, so gelangt man in natürlicher Weise zu den Begriffen des Abstandes, der Umgebung eines Punktes und des metrischen Raumes.

#### 3.1 Begriff des metrischen Raumes

Wir weisen auf folgende Zusatzliteratur hin:

H. Belkner: Metrische Räume. Teubner Verlag. Leipzig. 1972

A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis.

Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin. 1975

Der Raumbegriff wird in den Disziplinen unterschiedlich interpretiert.

Brockhaus, ABC Physik: *Grundbegriff zur Erfassung der gegenseitigen Anordnung von Körpern und Feldern.*

Mathematisches Wörterbuch: *Menge, zwischen deren Elemente Beziehungen erklärt sind.*

**BEISPIEL 3.1** *Der Abstand zweier reeller Zahlen auf der Zahlengerade ist eine Abbildung, die zwei reellen Zahlen eine nichtnegative Zahl zuordnet, in Zeichen  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ , mit folgenden Eigenschaften:*

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

**BEISPIEL 3.2** *Wir betrachten die Menge aller Tripel  $x = (x_1, x_2, x_3)$  reeller Zahlen und setzen  $E = \mathbb{R}^3$ . Dann ist der Euklidische Abstand (vgl. Abb. 1)*

$$d(x, y) := \left( \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

*zwischen zwei Punkten  $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$  und  $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$  eine Abbildung  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit den Eigenschaften*

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E,$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E.$$

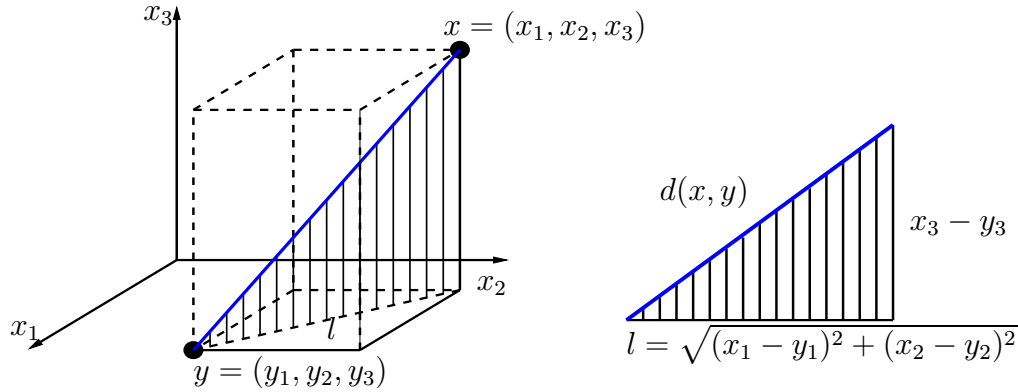


Abbildung 1: Euklidischer Abstand zweier Punkte in  $\mathbb{R}^3$

**Beweis.** (M1) und (M2) sind unmittelbar klar. (M3) folgt aus

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^3 (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 |x_i - z_i| |z_i - y_i| + \sum_{i=1}^3 (z_i - y_i)^2.$$

Wir wenden die Schwarzsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{1/2} \quad n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

für  $n = 3$ ,  $a_i = |x_i - z_i|$  und  $b_i = |z_i - y_i|$  an und erhalten

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 \leq \left[ \left( \sum_{i=1}^3 (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^3 (z_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \right]^2,$$

oder äquivalent

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Verallgemeinerung der ermittelten Eigenschaften und Axiomatisierung führen zum Begriff des metrischen Raumes. Dabei wird die geometrische Sprache (Punkt, Abstand, usw.) beibehalten.

**DEFINITION 3.1** Sei  $E$  eine nichtleere Menge. Ein Abstand auf  $E$  ist eine Abbildung  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit folgenden Eigenschaften:

(M1)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,

(M2)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$  (Symmetrie),

(M3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E$  (Dreiecksungleichung).

Das Paar  $(E, d)$  heißt metrischer Raum. Falls es aus dem Zusammenhang klar ist, auf welche Metrik wir uns beziehen, schreiben wir einfach  $E$  für  $(E, d)$ .

**BEISPIEL 3.3** Seien  $E = \mathbb{R}^3$  und für  $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$  eine Abbildung  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  durch

$$d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

definiert.  $(E, d)$  ist ein metrischer Raum.

**Beweis.** Man sieht sofort, dass (M1) und (M2) gelten. (M3) folgt aus

$$|x_i - y_i| = |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \quad i = 1, 2, 3,$$

durch Addition.

Der oben definierte Abstand heißt auch Manhattan-Abstand (vgl. Abb. 2). Um vom Punkt  $x = (x_1, x_2, x_3)$  zum Punkt  $y = (y_1, y_2, y_3)$  zu kommen, muss man folgende Entfernungen zurücklegen:

$|x_1 - y_1|$  entlang der dritten Avenue,  $|x_2 - y_2|$  entlang der fünften Street und  $|x_3 - y_3|$  von ebener Erde in den 37. Stock.

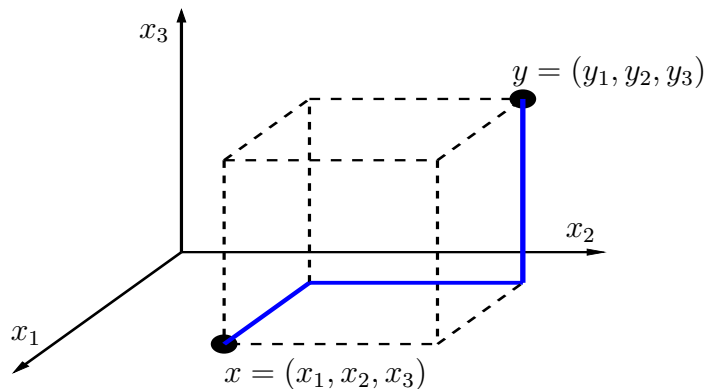


Abbildung 2: Manhattan-Abstand zweier Punkte in  $\mathbb{R}^3$

**DEFINITION 3.2** Eine Abbildung  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn das Bild  $f(A)$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt ist. äquivalent hierzu ist die Existenz einer Konstante  $C$  derart, dass  $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in A$ .

**BEISPIEL 3.4** Sei  $E := \mathcal{B}(A)$  die Menge aller beschränkten Abbildungen von  $A$  in  $\mathbb{R}$ . Sind  $f, g \in E$ , so ist offenbar auch  $f - g \in E$ . Wir setzen (vgl. Abb. 3)

$$d(f, g) := \sup_{x \in A} |(f - g)(x)|.$$

Dann ist  $(\mathcal{B}(A), d)$  ein metrischer Raum.

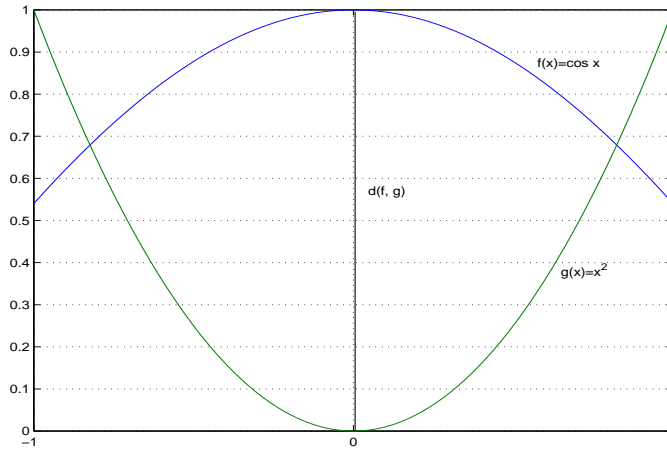


Abbildung 3: Abstand der Abbildungen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  für den Fall  $A = [-1, +1]$

**Beweis.** Die in  $\mathbb{R}$  beschränkte Menge  $|(f - g)(A)|$  hat eine kleinste obere Schranke, die nichtnegativ ist, somit ist  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . (M1) und (M2) sind wieder einfach zu sehen. Zum Beweis von (M3) nutzen wir zunächst, dass  $d(f, h)$  und  $d(h, g)$  Schranken für  $|(f - h)(x)|$  bzw.  $|(h - g)(x)|$  für jedes  $x \in A$  sind, also  $\forall x \in A$  gilt

$$|(f - g)(x)| = |(f - h)(x) + (h - g)(x)| \leq |(f - h)(x)| + |(h - g)(x)| \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Diese Ungleichung bedeutet, dass  $d(f, h) + d(h, g)$  eine obere Schranke für das Bild  $|(f - g)(A)|$  ist. Die kleinste obere Schranke  $d(f, g)$  ist jedoch höchstens gleich dieser oberen Schranke, d.h.,

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

**BEISPIEL 3.5** Es seien  $(E_i, d_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  metrische Räume und  $E$  das Produkt  $E = E_1 \times \dots \times E_m$ . Dann wird durch

$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq m} d_i(x_i, y_i)$$

für  $x = (x_1, \dots, x_m) \in E$  und  $y = (y_1, \dots, y_m) \in E$  eine Metrik auf  $E$  definiert, die Produktmetrik.

**Beachte:** Der durch die Produktmetrik  $d_{\text{Produkt}}$  erzeugte metrische Raum ist von dem durch den euklidischen Abstand  $d_{\text{Euklid}}$  auf  $\mathbb{R}^3$  erzeugten metrischen Raum verschieden. Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\frac{1}{\sqrt{3}} d_{\text{Euklid}}(x, y) \leq d_{\text{Produkt}}(x, y) \leq d_{\text{Euklid}}(x, y).$$

**DEFINITION 3.3** Seien  $(E, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset E$ . Dann genügt offenbar die Einschränkung von  $d$  auf  $A \times A$  den Bedingungen (M1)-(M3) und  $(A, d|_{A \times A})$  ist ein metrischer Raum. Die Einschränkung  $d|_{A \times A}$  heißt die von  $d$  auf  $A$  induzierte Metrik.

### 3.2 Kugeln, Sphären, Durchmesser und Abstand von Mengen

**DEFINITION 3.4** Seien  $(E, d)$  ein metrischer Raum,  $a \in E$  und  $r \in \mathbb{R}^+$ . Dann heißen die Mengen

$$\begin{aligned} B(a, r) &:= \{x \in E : d(x, a) < r\} && \text{offene Kugel,} \\ \bar{B}(a, r) &:= \{x \in E : d(x, a) \leq r\} && \text{abgeschlossene Kugel,} \\ S(a, r) &:= \{x \in E : d(x, a) = r\} && \text{Sphäre} \end{aligned}$$

um  $a$  mit Radius  $r$ .

**BEISPIEL 3.6** Seien  $E = \mathbb{R}$  und  $d(x, y) = |x - y|$ . Dann stimmen die offene, die abgeschlossene Kugel bzw. die Sphäre mit folgenden Mengen überein:  $B(a, r) = (a - r, a + r)$ ,  $\bar{B}(a, r) = [a - r, a + r]$  und  $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$ .

**BEISPIEL 3.7** Seien  $E = \mathbb{R}^2$  und  $d_1$  der euklidische sowie  $d_2$  der Manhattan-Abstand. Dann ist  $B(a, r)$  in  $(E, d_1)$  die Menge aller Punkte im Inneren eines Kreises mit dem Mittelpunkt in  $a$  und dem Radius  $r$  während  $B(a, r)$  in  $(E, d_2)$  die Menge aller Punkte im Inneren eines auf die Spitze gestellten Quadrates um  $a$  mit der Seitenlänge  $\sqrt{2}r$  ist (vgl. Abb. 4).

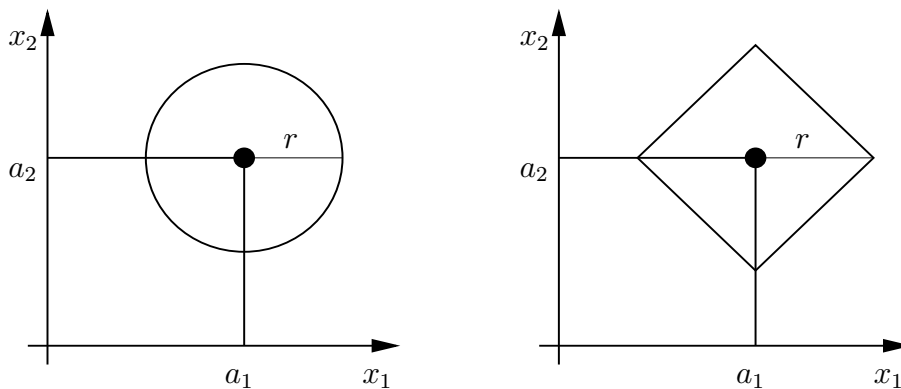


Abbildung 4: Kugeln in  $(E, d_1)$  und  $(E, d_2)$



**DEFINITION 3.5** Seien  $A, B \subset E$  und  $(E, d)$  ein metrischer Raum. Unter dem Abstand der Mengen  $A$  und  $B$  versteht man die nichtnegative Zahl

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Falls eine der Mengen nur aus einem Punkt  $x$  besteht, sprechen wir vom Abstand des Punktes  $x$  zur Menge  $A$  und schreiben

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

(vgl. Abb. 5).

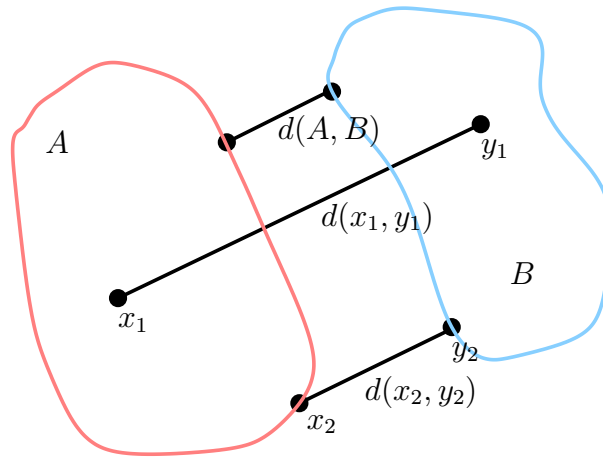


Abbildung 5: Abstand der Mengen  $A$  und  $B$

**DEFINITION 3.6** Eine Teilmenge  $A \subset E$  heißt im metrischen Raum  $(E, d)$  beschränkt, wenn es eine Konstante  $M > 0$  derart gibt, dass  $d(x, y) \leq M$  für alle  $x, y \in A$  gilt. Für eine beschränkte Menge  $A$  ist der Durchmesser von  $A$ ,

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y),$$

endlich.

### 3.3 Offene und abgeschlossene Mengen

**DEFINITION 3.7** Eine Teilmenge  $A \subset E$  eines metrischen Raumes heißt offen, wenn es zu jedem ihrer Punkte  $x \in A$  eine offene Kugel  $B(x, r)$  gibt, die ganz in  $A$  liegt, d.h.  $B(x, r) \subset A$ .

**BEISPIEL 3.8** Die leere Menge  $\emptyset$  und  $E$  sind in jedem metrischen Raum  $(E, d)$  offen.

**THEOREM 3.1** Im metrischen Raum ist jede offene Kugel eine offene Menge.

**Beweis.** Seien  $A = B(a, r)$  und  $x \in A$  beliebig. Da  $d(x, a) < r$ , haben wir  $r_1 := r - d(x, a) > 0$ . Wir zeigen, dass die Kugel  $B(x, r_1)$  ganz in  $A$  liegt. Sei  $y \in B(x, r_1)$  beliebig, dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r_1 + d(x, a) = r,$$

also  $y \in B(a, r) = A$ .

**THEOREM 3.2** Die Vereinigung jeder Familie  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  offener Mengen  $A_\lambda$  ist offen.

**Beweis.** Sei  $x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ . Dann gibt es mindestens ein  $\lambda_0 \in \Lambda$  mit  $x \in A_{\lambda_0}$ . Nun ist  $A_{\lambda_0}$  offen, d.h. es gibt eine offene Kugel  $B(x, r)$ , die ganz in  $A_{\lambda_0}$  enthalten ist. Also haben wir

$$B(x, r) \subset A_{\lambda_0} \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

**THEOREM 3.3** Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

**Beweis.** Ist der Durchschnitt leer, so ist er trivialerweise offen. Seien nun  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  offen und  $x \in \cap_{i=1}^n A_i$  beliebig. Da  $x$  in jeder der offenen Mengen  $A_i$  liegt, gibt es  $n$  offene Kugeln  $B(x, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die jeweils ganz in  $A_i$  liegen, in Zeichen  $B(x, r_i) \subset A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sei  $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$ , dann folgt aus  $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset A_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  die Inklusion

$$B(x, r) \subset \cap_{i=1}^n A_i,$$

was zu zeigen war.

Der Durchschnitt einer unendlichen Familie offener Mengen ist nicht notwendig offen, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 3.9** Seien  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  und  $A_n = (-1/n, +1/n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind die offenen Intervalle  $A_n$  offen und für den Durchschnitt gilt  $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ . Es gibt jedoch keine Kugel  $B(0, r)$ , die ganz im Durchschnitt der  $A_n$  liegt.

**DEFINITION 3.8** Eine Teilmenge  $A \subset E$  eines metrischen Raumes heißt abgeschlossen, wenn das Komplement von  $A$  bezüglich  $E$  offen ist.

**FOLGERUNG 3.1** Die Mengen  $E = C_E \emptyset$  und  $\emptyset = C_E E$  sind abgeschlossen. Der Durchschnitt einer Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

**Beweis.** Der Beweis der obigen Aussagen basiert auf

$$\begin{aligned}C_E(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) &= \cup_{\lambda \in \Lambda} C_E A_\lambda, \\C_E(\cup_{i=1}^n A_i) &= \cap_{i=1}^n C_E A_i.\end{aligned}$$

**Beachte:** In einem metrischen Raum gibt es Mengen, die

- offen und abgeschlossen sind (z.B.  $E, \emptyset$ ),
- offen und nicht abgeschlossen sind (z.B.  $(0, 1)$  in  $\mathbb{R}$ ),
- nicht offen und abgeschlossen sind (z.B.  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ ),
- weder offen noch abgeschlossen sind (z.B.  $(0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ ).

**THEOREM 3.4** *Im metrischen Raum sind die abgeschlossene Kugel  $\bar{B}(a, r)$  und die Sphäre  $S(a, r)$  abgeschlossene Mengen.*

**Beweis.** Nach der Definition abgeschlossener Mengen müssen wir zeigen, dass die Komplemente offen sind.

1. Sei  $x \in C_E(\bar{B}(a, r))$ , d.h.  $d(x, a) > r$ . Setze  $\rho := d(x, a) - r > 0$ . Dann ist

$$B(x, \rho) \cap \bar{B}(a, r) = \emptyset,$$

denn für jedes  $y \in B(x, \rho)$  haben wir

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \rho + d(y, a) = d(x, a) - r + d(y, a),$$

woraus  $d(y, a) > r$  folgt.

2. Das Komplement von  $S(a, r)$  ist die Vereinigung der offenen Mengen  $B(a, r)$  und  $C_E \bar{B}(a, r)$  und somit offen.

## 4 Folgen in metrischen Räumen

### 4.1 Konvergenzbegriff

**DEFINITION 4.1** Sei  $E$  eine Menge. Abbildungen von  $\mathbb{N}$  in  $E$  heißen Folgen in  $E$ . Ist  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$  eine Folge, so schreiben wir auch

$$(x_n), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (x_1, x_2, \dots)$$

für  $\varphi$ , wobei  $x_n := \varphi(n)$  das  $n$ -te Glied der Folge ist.

**DEFINITION 4.2** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt im metrischen Raum  $(E, d)$  konvergent gegen  $x_0 \in E$ , wenn zu jeder vorgegebenen Toleranzschranke  $\varepsilon > 0$  eine Indexschranke  $n_0(\varepsilon)$  existiert, so dass für alle  $n > n_0(\varepsilon)$   $d(x_n, x_0) < \varepsilon$  gilt, in Zeichen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{in } E, \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{in } E.$$

**Beachte:** Für jede Toleranzschranke  $\varepsilon > 0$  liegen außerhalb der offenen Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  höchstens endlich viele Folgenglieder.

**DEFINITION 4.3** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt im metrischen Raum divergent, wenn es kein  $x_0 \in E$  gibt, so dass  $x_n \rightarrow x_0$  in  $E$ .

**BEISPIEL 4.1** Im metrischen Raum  $\mathbb{R}$  ist

$$\left( \frac{n-1}{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \dots \right\}$$

gegen  $x_0 = 1/2$  konvergent. In der Tat gilt

$$d(x_n, x_0) = \left| \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{1}{2\varepsilon} =: n_0(\varepsilon).$$

**BEISPIEL 4.2** Im metrischen Raum  $(\mathbb{C}, d)$ ,  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ , der komplexen Zahlen ist die komplexe Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$z_n := \frac{n+2}{n+1} + i \frac{2n}{n+2}$$

gegen  $z_0 = 1 + 2i$  konvergent. Nach Definition des Abstandes in  $\mathbb{C}$  haben wir

$$\begin{aligned} d(z_n, z_0) &= \left| \frac{n+2}{n+1} + i \frac{2n}{n+2} - (1 + 2i) \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{4i}{n+2} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{16}{(n+2)^2}} < \frac{\sqrt{17}}{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n > \sqrt{17}/\varepsilon - 1 := n_0(\varepsilon)$  (vgl. Abb. 6).

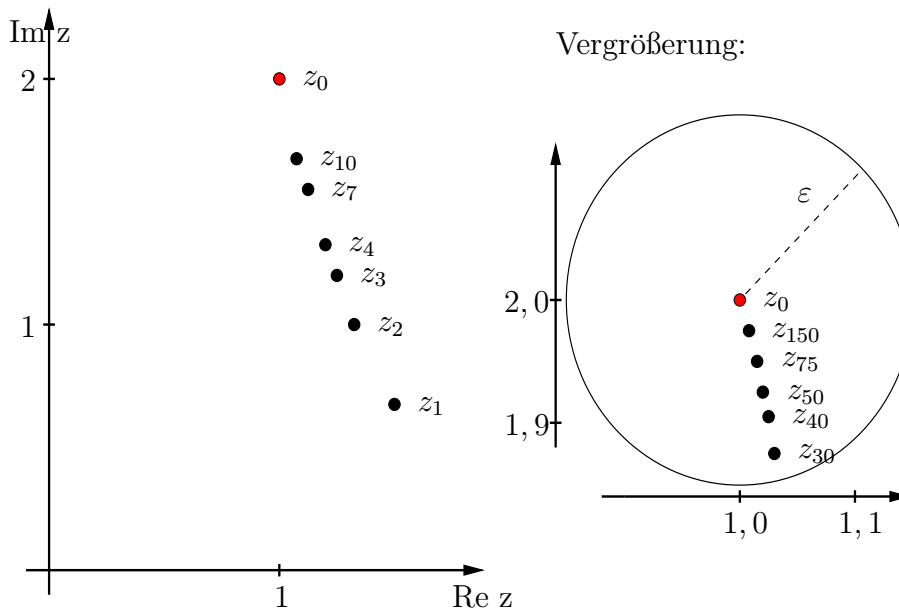


Abbildung 6: Darstellung der Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen

## 4.2 Eigenschaften konvergenter Folgen

**THEOREM 4.1** *Im metrischen Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.*

**Beweis.** Angenommen, es gibt zwei Grenzwerte  $x_0$  und  $x_0^*$ . Nach Definition finden wir zu jeder Toleranzschranke  $\varepsilon > 0$  Indexschränken  $n_0(\varepsilon/2)$  und  $n_0^*(\varepsilon/2)$ , so dass

$$\begin{aligned} \forall n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & \quad d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n > n_0^*\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) & \quad d(x_n, x_0^*) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

gilt. Damit haben wir für alle

$$n > \max\left(n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n_0^*\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

die Ungleichungskette

$$0 \leq d(x_0, x_0^*) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x_0^*) < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, muss  $d(x_0, x_0^*) = 0$  gelten im Widerspruch zur Annahme es gäbe zwei Grenzwerte.

**THEOREM 4.2** *Im metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.*

**Beweis.** Wegen

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

genügt es, die Beschränktheit von  $d(x_n, x_0)$  für  $n \in \mathbb{N}$  zu zeigen. Wir setzen  $\varepsilon = 1$ . Dann liegen außerhalb der Kugel  $B(x_0, 1)$  höchstens die endlich vielen Folgenglieder  $x_1, \dots, x_N$  mit  $N \leq n_0(1)$ . Sei  $R := \max(1, d(x_1, x_0), \dots, d(x_N, x_0))$ . Dann haben wir

$$d(x_n, x_0) \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**DEFINITION 4.4** *Es sei  $\varphi = (x_n)$  eine Folge in  $E$ , und  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strikt wachsend, d.h., aus  $m < n$  folgt  $\psi(m) < \psi(n)$ . Dann heißt  $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow E$  Teilfolge von  $\varphi$ . In Analogie zur Notation  $(x_n)$  schreiben wir kurz  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei  $n_k := \psi(k)$ . Da  $\psi$  strikt wachsend ist, gilt  $n_1 < n_2 < \dots$ .*

**BEISPIEL 4.3** *Ausgehend von der Folge*

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

erhalten wir Teilfolgen durch Angabe der strikt wachsenden Abbildung  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n_k = \psi(k) = 2k : & \quad \left(\frac{1}{2k}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\} \\ n_k = \psi(k) = 2k + 1 : & \quad \left(\frac{1}{2k+1}\right) = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\} \\ n_k = \psi(k) = k^2 : & \quad \left(\frac{1}{k^2}\right) = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\} \end{aligned}$$

**THEOREM 4.3** *Es sei  $(x_n)$  konvergent mit Grenzwert  $x_0$ . Dann ist auch jede Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)$  konvergent, und es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ .*

**Beweis.** Für jede Toleranzschranke  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Indexschranke  $n_0(\varepsilon)$ , so dass für alle  $n > n_0(\varepsilon)$   $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ . Da  $\psi$  strikt wachsend ist, gilt  $n_k \geq k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und damit auch für jedes  $k > n_0(\varepsilon)$   $d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$ .

### 4.3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit metrischer Räume

Bei der Definition konvergenter Folgen tritt der Grenzwert explizit auf. In diesem Abschnitt werden wir das Konzept der Cauchyfolgen einführen, das es ermöglicht, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, ohne den Grenzwert zu kennen.

Cauchy, Augustin-Louis 21.8.1789-13.5.1857 franz. Mathematiker, Verdienste beim strengen Aufbau der Analysis, Begründer der Funktionentheorie

**DEFINITION 4.5** Eine Folge heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon)$  existiert, so dass für alle  $m, n > n_0(\varepsilon)$   $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  gilt.

**BEISPIEL 4.4** Im metrischen Raum  $\mathbb{R}$  ist

$$(x_n) = \left( \frac{n-1}{2n} \right)$$

Cauchyfolge, denn für alle  $m \geq n$  gilt

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left| \frac{m-1}{2m} - \frac{n-1}{2n} \right| = \left| \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \right| < \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

falls nur  $m \geq n > \frac{1}{2\varepsilon} =: n_0(\varepsilon)$ .

**THEOREM 4.4** (Notwendiges Konvergenzkriterium)  
Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

**Beweis.** Sei  $(x_n)$  gegen  $x_0$  konvergent. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Indexschranke  $n_0 = n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ , so dass für alle  $n > n_0$   $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Dann haben wir aber auch für alle  $m, n > n_0$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Umkehrung des Theorem 4.4 gilt nicht in jedem metrischen Raum, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 4.5** Im metrischen Raum der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = 2$$

gegeben. Da  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  gegen  $\sqrt{2}$  konvergiert (Beweis als Übungsaufgabe), ist  $(x_n)$  Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  und damit auch in  $\mathbb{Q}$ .

**DEFINITION 4.6** Ein metrischer Raum  $E$  heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiele vollständiger metrischer Räume geben wir im nächsten Abschnitt an. Hier betrachten wir noch zwei weitere Eigenschaften von Cauchyfolgen.

**THEOREM 4.5** Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

**Beweis.** Für  $m, n > n_0(1)$  ist  $d(x_m, x_n) < 1$ . Sei  $N$  die kleinste natürliche Zahl, die größer als  $n_0(1)$  ist. Nun haben wir

$$d(x_n, x_1) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_1) < 1 + d(x_N, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

woraus für alle  $m, n \in \mathbb{N}$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_1) + d(x_n, x_1) < 2 + 2d(x_N, x_1)$$

folgt.

**THEOREM 4.6** *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

**Beweis.** Seien  $(x_n)$  eine Cauchyfolge und  $(x_{n_k})$  eine gegen  $x_0$  konvergierende Teilfolge. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_{01}(\frac{\varepsilon}{2})$ , so dass für alle  $m, n > n_{01}$   $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Ferner gibt es auch ein  $n_{02}(\frac{\varepsilon}{2})$ , so dass für alle  $k > n_{02}$   $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sei  $N$  die kleinste natürliche Zahl, die größer als  $n_{01}$  und  $n_{02}$  ist. Dann gilt wegen  $n_N \geq N$

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

## 4.4 Beispiele vollständig metrischer Räume

**THEOREM 4.7** *Der metrische Raum der reellen Zahlen ist vollständig.*

**Beweis.** Sei  $(x_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Wir definieren eine strikt wachsende Folge natürlicher Zahlen durch

1.  $n_1$  sei die kleinste natürliche Zahl, so dass  $\forall m, n \geq n_1 \quad |x_m - x_n| < 1/4$ ,
2.  $n_2 > n_1$  sei die kleinste natürliche Zahl, so dass  $\forall m, n \geq n_2 \quad |x_m - x_n| < 1/8$ ,

usw. .... Wir betrachten nun die Folge abgeschlossener Intervalle

$$I_k := \left[ x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^k, x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right].$$

Nach Definition der  $n_k$  ist

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$



oder äquivalent

$$x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Hieraus erhalten wir insbesondere

$$x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^k < x_{n_{k+1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad x_{n_{k+1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Somit bilden die  $I_k$  eine Intervallschachtelung  $I_{k+1} \subset I_k$ , wobei die Länge von  $I_k$  mit  $k \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es (genau eine) reelle Zahl  $x_0 \in I_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Andererseits liegt auch  $x_{n_k}$  in  $I_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$|x_{n_k} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

konvergiert die Teilfolge  $(x_{n_k})$  der Cauchyfolge  $(x_n)$  gegen  $x_0$ , also die Cauchyfolge ebenfalls gegen  $x_0$ .

**Beachte:** Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ist eine Folge reeller Zahlen  $(s_n)_{n \geq 1}$  genau dann konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall m, n > n_0(\varepsilon): |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Für konvergente Folgen  $(s_n)_{n \geq 1}$  folgt hieraus sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = 0$$

für jede positive Zahl  $p$ . Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Eigenschaft nicht hinreichend für die Konvergenz reeller Zahlenfolgen ist.

**BEISPIEL 4.6** *Es gibt eine divergente Folge reeller Zahlen  $(s_n)_{n \geq 1}$ , für die*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = 0$$

*für jede positive Zahl  $p$  gilt.*

Betrachte die Partialsummenfolge  $(s_n)_{n \geq 1}$  der harmonischen Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}$ .

Da die Reihe divergiert (vgl. Beispiel 7.4), divergiert die Folge  $(s_n)_{n \geq 1}$ .

Wegen

$$0 \leq s_{n+p} - s_n = \sum_{v=1}^{n+p} \frac{1}{v} - \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} = \sum_{v=n+1}^{n+p} \frac{1}{v} \leq \frac{p}{n+1},$$

gilt für jede positive Zahl  $p$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = 0.$$

**THEOREM 4.8** *Der metrische Raum der komplexen Zahlen ist vollständig.*

**Beweis.** Wir erinnern an den Abstand im metrischen Raum  $\mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

für zwei komplexe Zahlen  $z_1 = a_1 + ib_1$  und  $z_2 = a_2 + ib_2$ . Sei nun  $(z_n) = (a_n + ib_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$ , d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0(\varepsilon)$ , so dass für alle  $m, n > n_0(\varepsilon)$   $d(z_m, z_n) < \varepsilon$  gilt. Wegen

$$|a_m - a_n| \leq d(z_m, z_n) \quad \text{und} \quad |b_m - b_n| \leq d(z_m, z_n)$$

sind die reellen Zahlenfolgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist, gibt es Grenzwerte  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  in  $\mathbb{R}$ , insbesondere gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Indexschränken  $n_{01}(\varepsilon)$  und  $n_{02}(\varepsilon)$ , so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_{01}, \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > n_{02}.$$

Damit haben wir für  $z = a + ib$  und  $N(\varepsilon) := \max(n_{01}(\varepsilon), n_{02}(\varepsilon))$

$$d(z_n, z) < \sqrt{2}\varepsilon \quad \forall n > N.$$

**THEOREM 4.9** *Seien die metrische Räume  $(E_i, d_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$  vollständig. Dann ist der Produktraum  $E = E_1 \times \dots \times E_s$  bezüglich der Produktmetrik vollständig.*

**Beweis.** Sei  $(x^n)$  eine Cauchyfolge in  $(E, d)$ , d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0(\varepsilon)$ , so dass für alle  $m, n > n_0$   $d(x^m, x^n) < \varepsilon$  gilt. Wegen

$$d_i(x_i, y_i) \leq \max_{1 \leq j \leq s} d_j(x_j, y_j) = d(x, y) \quad i = 1, \dots, s$$

haben wir für alle  $m, n > n_0$  und jedes  $i = 1, \dots, s$

$$d_i(x_i^m, x_i^n) < \varepsilon,$$

d.h. die Folge  $(x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchyfolge in  $(E_i, d_i)$  für jedes  $i = 1, \dots, s$ . Da  $(E_i, d_i)$  vollständig ist, gibt es einen Grenzwert in  $E_i$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = x_i^0 \in E_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

Wir zeigen, dass  $(x^n)$  in  $E$  gegen  $x^0 := (x_1^0, \dots, x_s^0)$  konvergiert. Zu jeder Toleranzschränke  $\varepsilon > 0$  gibt es Indexschränken  $n_{0i}(\varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , so dass für alle  $n > n_{0i}$   $d_i(x_i^n, x_i^0) < \varepsilon$  gilt. Sei  $N(\varepsilon) := \max_{1 \leq i \leq s} n_{0i}(\varepsilon)$ . Dann gilt

$$d(x^n, x^0) = \max_{1 \leq i \leq s} d_i(x_i^n, x_i^0) < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

**FOLGERUNG 4.1** *Der metrische Raum  $\mathbb{R}^s$  ist vollständig.*

Wir erinnern, dass standardmäßig der  $\mathbb{R}^s$  mit der Produktmetrik versehen ist, d.h. für zwei  $s$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$  und  $y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}^s$  ist der Abstand gegeben durch

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq s} |x_i - y_i|.$$

**BEISPIEL 4.7** *Die Folge*

$$(x^n) := \left( \left( 1, \frac{n+1}{n}, \frac{1-n}{n}, -2 \right) \right)$$

ist Cauchyfolge in  $\mathbb{R}^4$  und damit konvergent. In der Tat ist für  $m \geq n$

$$d(x^m, x^n) = \max_{1 \leq i \leq 4} |x_i^m - x_i^n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0(\varepsilon).$$

**BEISPIEL 4.8** *Die reelle Zahlenfolge*

$$\left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  und daher konvergent. Zunächst ist für  $m \geq n$

$$d(x_m, x_n) = \left| \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right| = \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j^2}.$$

Wegen

$$\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$$

können wir die rechte Seite weiter abschätzen

$$\sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j^2} < \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j-1} - \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für  $n > 1/\varepsilon =: n_0(\varepsilon)$ .

**BEISPIEL 4.9** *Die reelle Zahlenfolge  $(x_n)$  mit  $x_n = (-1)^n$  ist beschränkt, aber keine Cauchyfolge. Wegen*

$$d(x_m, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } m+n \text{ gerade} \\ 2 & \text{für } m+n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gibt es zu  $\varepsilon = 1/2$  kein  $n_0$ , so dass für alle  $m, n > n_0$   $d(x_m, x_n) < 1/2$  gilt.

## 4.5 Rechenregeln für konvergente Folgen in $\mathbb{R}^s$ und $\mathbb{C}$

**DEFINITION 4.7** Im  $\mathbb{R}^s$  führen wir die Summe zweier  $s$ -Tupel reeller Zahlen  $x = (x_1, \dots, x_s)$  und  $y = (y_1, \dots, y_s)$  durch

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_s + y_s)$$

und die Multiplikation eines  $s$ -Tupels mit einer reellen Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  durch

$$\alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_s)$$

ein. Die Menge aller  $s$ -Tupel stellt dann einen linearen Vektorraum dar.

### Regeln für konvergente Folgen im $\mathbb{R}^s$

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$  in  $\mathbb{R}^s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = x_i$  in  $\mathbb{R}, \forall i$
- (ii)  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$  in  $\mathbb{R}^s, \lim_{n \rightarrow \infty} y^n = y$  in  $\mathbb{R}^s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x^n + \beta y^n = \alpha x + \beta y$  in  $\mathbb{R}^s$

### Regeln für konvergente Folgen in $\mathbb{C}$

- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  in  $\mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  in  $\mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$  in  $\mathbb{C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = zw, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$  falls  $w \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha z_n + \beta w_n = \alpha z + \beta w$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

**Beweis.** (i) und (iii) folgen unmittelbar aus der Definition des Abstandes in  $\mathbb{R}^s$  bzw.  $\mathbb{C}$ . (ii) folgt wegen

$$\begin{aligned} d(\alpha x^n + \beta y^n, \alpha x + \beta y) &= \max_i |\alpha x_i^n + \beta y_i^n - \alpha x_i - \beta y_i| \\ &\leq |\alpha| \max_i |x_i^n - x_i| + |\beta| \max_i |y_i^n - y_i| \\ &= |\alpha| d(x^n, x) + |\beta| d(y^n, y). \end{aligned}$$

Der erste Teil von (iv) basiert auf

$$\begin{aligned} |z_n w_n - zw| &\leq |z_n w_n - z_n w + z_n w - zw| \\ &\leq |z_n| |w_n - w| + |w| |z_n - z| \end{aligned}$$

und der Beschränktheit konvergenter Folgen. Zum Beweis des zweiten Teils bemerken wir zunächst, dass aus  $||w_n| - |w|| \leq |w_n - w| < \varepsilon$  für  $n > n_0(\varepsilon)$

$$|w| - \varepsilon < |w_n| < |w| + \varepsilon$$

folgt, für  $n > n_0(|w|/2)$  also  $|w_n| > |w|/2 > 0$  folgt. Nun gilt

$$\left| \frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \right| = \frac{|z_n w - z w_n|}{|w_n| |w|} \leq \frac{|z_n - z|}{|w_n|} + \frac{|z| |w_n - w|}{|w_n| |w|},$$

und für  $n > n_0(|w|/2)$

$$\left| \frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \right| < \frac{2}{|w|} \left[ |z_n - z| + \frac{|z|}{|w|} |w_n - w| \right].$$

Der letzte Teil, die Linearität, basiert auf

$$|\alpha z_n + \beta w_n - \alpha z - \beta w| \leq |\alpha| |z_n - z| + |\beta| |w_n - w|.$$

## 4.6 Spezielle Eigenschaften reeller Zahlenfolgen

Wir erinnern daran, dass die Menge der reellen Zahlen ein geordneter Körper ist und nutzen im folgenden die Ordnung zusätzlich aus.

**DEFINITION 4.8** Eine Folge  $(x_n)$  reeller Zahlen heißt wachsend (fallend), wenn  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_{n+1} \leq x_n$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Im Falle, dass das  $\leq$ -Zeichen durch das  $<$ -Zeichen ersetzt werden kann, spricht man von strikt wachsend (fallend).

**BEMERKUNG 4.1** Für eine wachsende (bzw. fallende) Folge verwenden wir das Symbol  $x_n \uparrow$  (bzw.  $x_n \downarrow$ ). Liegt zusätzlich Konvergenz gegen  $x_0$  vor, so schreiben wir  $x_n \uparrow x_0$  (bzw.  $x_n \downarrow x_0$ ) anstelle von  $x_n \rightarrow x_0$ .

**BEISPIEL 4.10** Die Folge  $(x_n) = (1/n)$  ist strikt fallend, denn

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

**BEISPIEL 4.11** Die Folge  $(x_n) = (q^n)$  mit  $q \in (0, 1)$  ist strikt fallend, denn

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q < 1.$$

**THEOREM 4.10** Jede wachsende (fallende) beschränkte Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert, und es gilt

$$x_n \uparrow \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (x_n \downarrow \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

**Beweis.** Sei  $(x_n)$  eine wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen. Da die Menge  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist, existiert  $x := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

für alle  $n > n_0$  gilt. Der Beweis für eine fallende Folge verläuft analog.

**THEOREM 4.11** (Vergleichssatz) *Es seien  $(x_n), (y_n)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ . Ferner gelte  $x_n \leq y_n$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Beweis.** Angenommen es sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Dann ist  $\varepsilon := (x - y)/2 > 0$  und wir finden ein  $n_0$  derart, dass für alle  $n > n_0$

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \quad y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon,$$

woraus insbesondere

$$y_n < \frac{x + y}{2} < x_n \quad \forall n > n_0$$

folgt. Demnach kann die Ungleichung  $x_n \leq y_n$  nur für endlich viele  $n \leq n_0$  gelten im Widerspruch zur Voraussetzung.

## 4.7 Einige wichtige Grenzwerte

**BEISPIEL 4.12** *Es sei  $a \in \mathbb{C}$ . Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |a| < 1 \\ 1, & \text{falls } a = 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } |a| \geq 1, \quad a \neq 1. \end{cases}$$

Angenommen, die Folge  $(a^n)$  konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} a^n.$$

Damit gilt entweder  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$  oder  $a = 1$ . Sei zunächst  $|a| < 1$ . Dann ist die Folge  $(|a|^n) = (|a^n|)$  fallend und beschränkt. Sie besitzt daher einen Grenzwert, der nach obiger Argumentation nur Null sein kann. Ist  $a = 1$ , so ist  $a^n = 1$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$ . Wir nehmen jetzt  $|a| = 1$  und  $a \neq 1$  an. Angenommen die Folge würde konvergieren, so muss sie nach obiger Argumentation gegen Null konvergieren, was aber wegen  $|a^n| = |a|^n = 1$  nicht möglich ist. Sei schließlich  $|a| > 1$ . Dann ist  $1/|a| < 1$ , und  $(1/|a^n|)$  eine Nullfolge. Also gibt es eine Indexschränke  $n_0(\varepsilon)$  mit  $1/|a^n| < 1$  für alle  $n > n_0$  oder äquivalent  $|a^n| > 1$  für alle  $n > n_0$ . Somit divergiert  $(a^n)$ .

**BEISPIEL 4.13** *Es seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| > 1$ . Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

*d.h., für  $|a| > 1$  wächst die Funktion  $n \rightarrow a^n$  schneller als jede Potenz  $n \rightarrow n^k$ .*

Für  $\alpha := 1/|a| \in (0, 1)$  und  $x_n = n^k \alpha^n$  haben wir

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h.,  $x_{n+1}/x_n \downarrow \alpha$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei nun  $\beta \in (\alpha, 1)$ . Dann gibt es eine Indexschranke  $n_0$  mit  $x_{n+1}/x_n < \beta$  für alle  $n > n_0$ . Also gilt mit vollständiger Induktion für einen festen Index  $N > n_0$

$$x_{N+1} < \beta x_N, \quad x_{N+2} < \beta^2 x_N, \quad \dots, \quad x_{N+n} < \beta^n x_N, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da  $(\beta^n)$  eine Nullfolge ist, ist auch  $(x_n)$  eine Nullfolge.

**BEISPIEL 4.14** Für  $a \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Die Fakultät  $n \rightarrow n!$  wächst also schneller als jede Funktion  $n \rightarrow a^n$ .

Sei  $\beta \in (0, 1)$ . Es gibt ein  $N$  mit  $|a|/k < \beta$  für alle  $k > N$ . Somit folgt für alle  $n > N$

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|^N}{N!} \prod_{k=N+1}^n \frac{|a|}{k} \leq \frac{|a|^N}{N!} \beta^{n-N} = \frac{|a|^N}{\beta^N N!} \beta^n.$$

Da  $(\beta^n)$  eine Nullfolge ist, folgt die Behauptung.

**BEISPIEL 4.15** Die Folge  $((1 + 1/n)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Für ihren Grenzwert

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

die Eulersche Zahl, gilt  $2 < e < 3$ .

Wir setzen

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

und zeigen, dass die Folge  $(a_n)$  wachsend und die Folge  $(b_n)$  fallend sind. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Wir nutzen die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{für } a > -1, \quad n \in \mathbb{N},$$

die leicht mit vollständiger Induktion gezeigt werden kann und in der das Gleichungszeichen nur für  $n = 1$  oder für  $a = 0$  gilt. Anwendung der Ungleichung ergibt

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Somit haben wir  $a_{n+1} > a_n$ . Betrachten wir nun

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}.$$

durch Anwendung der Bernoullischen Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} = 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2 - 1} \\ &> 1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h.,  $(a_n)$  ist strikt wachsend,  $(b_n)$  ist strikt fallend und beide Folgen sind beschränkt. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

sind die existierenden Grenzwerte beider Folgen gleich. Insbesondere sind  $a_1 = 2$  eine untere Schranke und  $b_1 = 4$  eine obere Schranke für  $e$ . Eine bessere obere Schranke liefert  $b_{10} \sim 2.853116 \dots < 3$ . Eine numerische Berechnung liefert den Wert

$$e = 2.71828182845904523536 \dots$$

## 4.8 Umgebungen, Häufungs- und Berührungspunkte

**DEFINITION 4.9** Sei  $A$  eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raumes  $E$ . Unter einer offenen Umgebung von  $A$  versteht man eine  $A$  umfassende offene Menge. Eine Umgebung von  $A$  ist jede Menge, die eine offene Umgebung von  $A$  enthält. Ist  $A = \{x\}$ , so spricht man von Umgebungen des Punktes  $x$  statt von Umgebungen von  $\{x\}$ .

**DEFINITION 4.10** Ein Punkt  $x \in E$  heißt Berührungspunkt der Menge  $A \subset E$ , falls jede Umgebung von  $x$  einen nichtleeren Durchschnitt mit  $A$  hat.

**DEFINITION 4.11** Ein Punkt  $x \in E$  heißt Häufungspunkt der Menge  $A \subset E$ , falls jede Umgebung von  $x$  einen von  $x$  verschiedenen Punkt von  $A$  enthält.



## FOLGERUNG 4.2

- (i) Jeder Häufungspunkt einer Menge  $A$  ist Berührungspunkt der Menge  $A$ .
- (ii) Jeder Berührungspunkt  $x \notin A$  der Menge  $A$  ist Häufungspunkt von  $A$ .
- (iii) Jeder Punkt  $x \in A$  ist Berührungspunkt von  $A$ .

**Beweis.** (i), (ii) folgen unmittelbar aus der Definition. (iii) ergibt sich daraus, dass jede Umgebung des Punktes  $x$  den Punkt  $x$  enthält.

**DEFINITION 4.12** Die Menge aller Berührungspunkte einer Menge  $A$  heißt abgeschlossene Hülle oder Abschließung von  $A$  und wird mit  $\bar{A}$  bezeichnet.

**FOLGERUNG 4.3** Bezeichne  $HP(A)$  die Menge aller Häufungspunkte der Menge  $A$ . Dann gilt  $\bar{A} = A \cup HP(A)$ .

**Beweis.** Sei  $x \in A$ , dann ist wegen (iii)  $x$  Berührungspunkt von  $A$ , d.h.,  $A \subset \bar{A}$ . Jeder Berührungspunkt  $x \notin A$  von  $A$  ist aber nach (ii) Häufungspunkt von  $A$ , liegt also in  $HP(A)$ , damit haben wir  $\bar{A} \subset A \cup HP(A)$ . Wegen (i) gilt nun  $HP(A) \subset \bar{A}$ .

**THEOREM 4.12** Für jede Menge  $A$  ist die Abschließung  $\bar{A}$  von  $A$  die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält, d.h.,

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{ abgeschlossen}}} B.$$

**Beweis.** Wir bezeichnen mit

$$D := \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{ abgeschlossen}}} B.$$

$D$  ist als Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen und enthält die Menge  $A$ .

Wir zeigen zunächst, dass jeder Berührungspunkt von  $A$  zu  $D$  gehört, also  $\bar{A} \subset D$  ist. Da  $A \subset D$ , genügt es, Berührungspunkte  $x \notin A$  zu betrachten. Dann ist  $x \in HP(A)$ . Angenommen  $x \notin D$ . Dann gilt für mindestens eine abgeschlossene Menge  $B \supset A$   $x \notin B$ . Nun war  $B$  abgeschlossen, also gibt es eine Umgebung um  $x$ , die keinen Punkt mit  $D$  gemeinsam hat. Somit kann  $x$  kein Häufungspunkt von  $A$  sein und es gilt  $\bar{A} \subset D$ .

Wir zeigen, dass  $\bar{A}$  abgeschlossen ist, so dass wegen  $A \subset \bar{A}$  automatisch  $D$  als Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen, die  $A$  enthalten, Teilmenge von  $\bar{A}$  ist.  $\bar{A}$  abgeschlossen ist mit  $C_E \bar{A}$  offen äquivalent. Sei  $x$  kein Berührungspunkt von  $A$ , also  $x \in C_E \bar{A}$ . Dann gibt es eine Umgebung, in der keine Punkte aus  $A$

liegen, insbesondere auch eine Kugel  $B(x, r)$  mit  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ . Angenommen, es gibt einen Punkt  $y \in \bar{A} \setminus A$  aus  $B(x, r)$ . Dann würden in jeder Umgebung  $B(y, R)$  Punkte aus  $A$  liegen. Aber für  $R := r - d(x, y)$  gilt

$$B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r), \quad B(x, r) \cap A = \emptyset.$$

Also gibt es derartige Punkte  $y$  nicht und  $B(x, r)$  liegt ganz im Komplement von  $\bar{A}$ . Damit ist  $C_E \bar{A}$  offen.

**THEOREM 4.13** (*Bolzano-Weierstraß*)

*Jede unendliche beschränkte Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

**Beweis.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gibt es ein Intervall  $I_1 := [-c, +c]$ , in dem alle Punkte aus  $A$  liegen. Wir halbieren das Intervall und wählen ein Teilintervall aus, in dem unendlich viele Elemente von  $A$  liegen. Wir fahren dann mit dem ausgewählten Intervall in gleicher Weise fort. So erhalten wir eine Folge  $(I_n)$  von Intervallen, mit  $I_{n+1} \subset I_n$ . Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es eine reelle Zahl  $\xi \in \mathbb{R}$ , die in allen Intervallen liegt. Wir zeigen, dass  $\xi$  Häufungspunkt von  $A$  ist. Wir betrachten eine beliebige Umgebung von  $\xi$ , die insbesondere eine Kugelumgebung  $B(\xi, r)$  enthält. Da  $\xi \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für die Länge  $l_n$  der Intervalle  $l_n = c/2^{n-1}$  gilt, gibt es ein  $I_n$  mit  $I_n \subset B(\xi, r)$ . Jedes  $I_n$  enthält nach Konstruktion aber unendlich viele Elemente von  $A$  also gegebenenfalls auch ein von  $\xi$  verschiedenes.

Im Fall der komplexen Zahlen geht man analog vor und teilt die Rechtecke  $R_n$  jeweils in vier Teile. Die Projektionen auf die Real- bzw. Imaginärteile liefern dann zwei Intervallschachtelungen in  $\mathbb{R}$ .

**FOLGERUNG 4.4** *Jede beschränkte Zahlenfolge  $(x_n)$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis.** Gibt es ein  $x$ , so dass für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$   $x_n = x$ , gilt, so konvergiert die Teilfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ . Gibt es kein derartiges  $x$ , so ist das Bild der Folge  $\varphi = (x_n)$  also  $A := \varphi(\mathbb{N})$  eine unendliche beschränkte Teilmenge in  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert ein Häufungspunkt  $\xi$  dieser Menge. Wir konstruieren nun eine Teilfolge von  $(x_n)$ , die gegen  $\xi$  konvergiert. Wir betrachten die Folge der Kugeln  $B((\xi, 1/n))$ . In jeder dieser Kugeln gibt es unendlich viele Elemente der Folge, da andernfalls die Kugel  $B(\xi, \rho)$  mit  $\rho$  kleiner als der minimale Abstand eines Folgengliedes zu  $\xi$  keinen Punkt mit  $A$  gemein hätte. Sei  $x_{n_1} \in B(\xi, 1)$ . Angenommen wir haben für  $n_i$ , dass  $x_{n_i} \in B(\xi, 1/n)$  gilt. Dann gibt es in der Kugel  $B(\xi, 1/(n+1))$  ein Element  $x_n$  mit einem Index höher als  $n_i$ . Wir bezeichnen diesen Index mit  $n_{i+1}$ . Dann konvergiert die Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

**DEFINITION 4.13** Ein Punkt  $x$  heißt Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$ , wenn in jeder Umgebung von  $x$  unendlich viele Glieder der Folge liegen.

**Beachte:** Die Begriffe Häufungspunkt einer Folge  $\varphi = (x_n)$  und Häufungspunkt der Menge  $\varphi(\mathbb{N})$  sind verschieden. Beispielsweise sind für eine stationäre Folge  $(x_n) = (x)$  der Punkt  $x$  Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$  aber kein Häufungspunkt der einelementigen Menge  $\varphi(\mathbb{N}) = \{x\}$ .

## 4.9 Limes superior and Limes inferior

Sei  $(x_n)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$a_n := \inf_{k \geq n} x_k := \inf\{x_k ; k \geq n\}, \quad b_n := \sup_{k \geq n} x_k := \sup\{x_k ; k \geq n\}.$$

Dann sind  $(a_n)$  wachsend,  $(b_n)$  fallend und beide Folgen beschränkt, es existieren somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**DEFINITION 4.14** Sei  $(x_n)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Die Grenzwerte

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k)$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k)$$

heißen Limes superior und Limes inferior.

Die beiden Werte Limes superior und Limes inferior können wie folgt charakterisiert werden:

**THEOREM 4.14** Eine beschränkte Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  besitzt einen kleinsten Häufungspunkt  $x_* \in \mathbb{R}$  und einen größten Häufungspunkt  $x^* \in \mathbb{R}$ . Ferner gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

**Beweis.** Wir setzen  $x_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  und zeigen, dass  $x_*$  kleinster Häufungspunkt ist. Da

$$(a_n) = (\inf_{k \geq n} x_k)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine wachsende Folge ist, die gegen  $x_*$  konvergiert, gilt  $x_* = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Zu jedem  $\xi < x_*$  finden wir daher ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\xi < a_N \leq x_n$  für alle  $n \geq N$ . Somit liegen in der Umgebung  $B(\xi, \rho)$  für hinreichend kleines  $\rho$  keine Folgenglieder  $x_n$ . Damit gibt es keinen kleineren Häufungspunkt als  $x_*$  und es bleibt zu zeigen, dass  $x_*$  tatsächlich Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen

$$\inf_{k \geq n} x_k = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gibt es zu jedem  $n$  ein  $k \geq n$  mit

$$x_k < a_n + \varepsilon \leq x_* + \varepsilon.$$

Damit liegen für jedes  $\varepsilon > 0$  unendlich viele Folgenglieder links von  $x_* + \varepsilon$ . Andererseits gibt es keinen Häufungspunkt kleiner als  $x_*$ . Also ist  $x_*$  Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$ .

## 4.10 Vervollständigung metrischer Räume

Ist ein metrischer Raum  $(E, d)$  nicht vollständig, kann man ihn immer als einen Teilraum eines vollständigen metrischen Raum  $(E^*, d^*)$  auffassen. Man sagt, dass  $(E, d)$  in  $(E^*, d^*)$  eingebettet ist, wenn es eine injektive Abbildung  $\Psi : E \rightarrow E^*$  gibt, die isometrisch ist, d.h.,

$$d^*(\Psi(x), \Psi(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in E.$$

Durch Identifikation der Elemente  $\Psi(x)$  mit  $x$  folgt  $E \subset E^*$  und  $d$  ist Einschränkung von  $d^* : E^* \times E^*$  auf  $E \times E$ . Wir zeigen zunächst die **Existenz** eines Raumes  $(E^*, d^*)$ .

In der Menge  $E^*$  aller Cauchy-Folgen führen wir eine Äquivalenzrelation durch

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{wenn} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0,$$

ein. Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und definiert damit eine Klasseneinteilung. Für zwei Klassen  $x^*$  und  $y^*$  mit den Repräsentanten  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir den Abstand

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Wir müssen zunächst zeigen, dass der Grenzwert existiert und unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. Die Folge  $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen ist wegen

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  und besitzt damit einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten, denn aus  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt wegen

$$|d(z_n, w_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(z_n, x_n) + d(y_n, w_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Wir zeigen nun, dass  $(E^*, d^*)$  ein metrischer Raum ist. Zunächst ist  $d^*(x^*, y^*) \geq 0$  als Grenzwert einer Folge nichtnegativer Zahlen.

(M1) Ist  $x^* = y^*$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Repräsentant, so ist

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0.$$

Umgekehrt folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$  die Äquivalenz beider Folgen, also  $x^* = y^*$ .

(M2) Die Symmetrie ergibt sich unmittelbar aus

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = d^*(y^*, x^*).$$

(M3) Für die Repräsentanten  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $x^*$ ,  $y^*$  und  $z^* \in E^*$  gilt die Dreiecksungleichung

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n),$$

woraus durch Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$

$$d^*(x^*, y^*) \leq d(x^*, z^*) + d(z^*, y^*)$$

folgt.

Wir zeigen nun, die **Existenz einer isometrischen Abbildung**  $(E, d)$  in  $(E^*, d^*)$ . Dazu ordnen wir jedem  $x \in E$  die Klasse  $x^*$  der gegen  $x$  konvergierenden Cauchy-Folgen zu. Ein möglicher Repräsentant wäre  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ . Konvergiert nämlich ein Repräsentant der Klasse gegen  $x$ , so konvergiert jeder Repräsentant der Klasse gegen  $x$ . Ferner ist

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

demnach  $d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ . Es bleibt die Vollständigkeit von  $(E^*, d^*)$  zu zeigen. Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(E, d)$  der Klasse  $x^*$ , so konvergiert die Folge in  $(E^*, d^*)$  gegen  $x^*$ , denn

$$d^*(x^*, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0.$$

Zu jeder Cauchy-Folge aus  $(E^*, d^*)$  gibt es eine äquivalente Cauchy-Folge aus  $(E, d)$ , die gegen  $x^*$  konvergiert.

## 5 Stetige Abbildungen

### 5.1 Begriff der stetigen Abbildung

Wir betrachten eine Abbildung  $f : E \rightarrow E'$  eines metrischen Raumes  $(E, d)$  in den metrischen Raum  $(E', d')$ . Nachfolgende Definition charakterisiert das lokale Verhalten von  $f$  in Umgebung eines Punktes  $x_0 \in E$ .

**DEFINITION 5.1** Die Abbildung  $f : E \rightarrow E'$  eines metrischen Raumes  $(E, d)$  in den metrischen Raum  $(E', d')$  heißt im Punkt  $x_0 \in E$  stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

$f$  heißt auf  $E$  stetig, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $E$  stetig ist.

Eine Abbildung  $f$  ist demnach genau dann im Punkt  $x_0$  stetig, wenn es zu jeder Kugel  $B(f(x_0), \varepsilon)$  im Bildbereich  $E'$  eine Kugel  $B(x_0, \delta(\varepsilon))$  im Urbildbereich gibt, so dass das Bild der Kugel  $B(x_0, \delta(\varepsilon))$  in  $B(f(x_0), \varepsilon)$  liegt.

**BEISPIEL 5.1** Jede konstante Abbildung  $f : E \rightarrow E'$  ist auf  $E$  stetig.

Sei etwa  $f(x) = a$  für alle  $x \in E$  und  $x_0 \in E$  beliebig. Dann gilt für alle  $x \in E$

$$d'(f(x), f(x_0)) = d'(a, a) = 0 < \varepsilon.$$

**BEISPIEL 5.2** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig.

Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  haben wir

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(x_0)) &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| |x + x_0| \\ &= |x - x_0| |x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0| (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &< (1 + 2|x_0|) |x - x_0| \quad \text{für } |x - x_0| < 1 \end{aligned}$$

und somit

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) := \min \left( 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \right).$$

**BEISPIEL 5.3** Das Skalarprodukt  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f(x, y) := \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ , ist eine stetige Abbildung. Hierbei bezeichnen  $x = (x_1, x_2, x_3)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)$  Punkte aus  $\mathbb{R}^3$ .

Standardmäßig sei der  $\mathbb{R}^6$  mit der Produktmetrik

$$d((x, y), (z, w)) = \max_{1 \leq i \leq 3} (|x_i - z_i|, |y_i - w_i|)$$

versehen. Wir müssen zeigen, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{für } d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta(\varepsilon).$$

Mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  und  $y_0 = (y_{01}, y_{02}, y_{03})$  haben wir

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= \left| \sum_{i=1}^3 (x_i y_i - x_{0i} y_{0i}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^3 ((x_i - x_{0i}) y_i + x_{0i} (y_i - y_{0i})) \right| \\ &\leq d((x, y), (x_0, y_0)) \left\{ \sum_{i=1}^3 (|y_i| + |x_{0i}|) \right\} \\ &\leq d((x, y), (x_0, y_0)) \left\{ \sum_{i=1}^3 (|y_i - y_{0i}| + |y_{0i}| + |x_{0i}|) \right\} \\ &\leq d((x, y), (x_0, y_0)) \left\{ \sum_{i=1}^3 (1 + |y_{0i}| + |x_{0i}|) \right\} \end{aligned}$$

für  $d((x, y), (x_0, y_0)) < 1$  und somit

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für } d((x, y), (x_0, y_0)) < \min \left( 1, \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^3 (1 + |y_{0i}| + |x_{0i}|)} \right).$$

**BEMERKUNG 5.1** Ist  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0d})$  stetig, so ist die Schnittkurve  $\Phi(t) := f(x_0 + th)$  mit  $h = (h_1, \dots, h_d) \neq 0$ , als Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt 0 stetig.

**Beweis.** Der Beweis folgt sofort aus

$$|\Phi(t) - \Phi(0)| = |f(x_0 + th) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } d(x_0 + th, x_0) = |t| \max_{1 \leq i \leq d} |h_i| < \delta(\varepsilon).$$

Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 5.4** Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } |y| \geq x^2 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ 1 & \text{für } 0 < |y| < x^2 \end{cases}$$

ist entlang jeder Geraden durch den Ursprung im Ursprung stetig, sie ist jedoch als Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  unstetig.

## 5.2 Äquivalente Charakterisierungen der Stetigkeit

**THEOREM 5.1** Für jede Abbildung  $f : E \rightarrow E'$  eines metrischen Raumes  $(E, d)$  in den metrischen Raum  $(E', d')$  sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i)  $f$  ist auf  $E$  stetig
- (ii) für jede in  $E'$  offene Menge  $B$  ist das Urbild  $f^{-1}(B)$  offen in  $E$
- (iii) für jede in  $E'$  abgeschlossene Menge  $B$  ist das Urbild  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen in  $E$
- (iv) für jede Teilmenge  $A \subset E$  gilt  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ , d.h., das Bild der abgeschlossenen Hülle von  $A$  ist in der abgeschlossenen Hülle des Bildes von  $A$  enthalten

**Beweis.** (i)  $\Rightarrow$  (iv)

Zu zeigen ist: Ist  $x_0$  Berührungspunkt von  $A$ , so ist  $f(x_0)$  Berührungspunkt von  $f(A)$ . Sei  $x_0 \in \overline{A}$ . Innerhalb jeder Umgebung von  $f(x_0)$  gibt es eine Kugel  $B(f(x_0), \varepsilon)$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt nun die Existenz einer Kugel  $B(x_0, \delta(\varepsilon))$  derart, dass für alle  $x \in B(x_0, \delta(\varepsilon))$  auch  $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ . Da  $x_0$  Berührungspunkt von  $A$  war, gibt es in  $B(x_0, \delta(\varepsilon))$  Punkte  $x$  aus  $A$ , für die  $f(x)$  in Umgebung von  $f(x_0)$  liegt.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii)

Sei  $B \subset E'$  abgeschlossen und  $A = f^{-1}(B)$ . Dann gilt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{B} = B,$$

also  $\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$ . Da für jede Menge  $A \subset \overline{A}$  haben wir  $A = \overline{A}$ , d.h.,  $A$  ist abgeschlossen.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii)

Sei  $B \subset E'$  offen, d.h.,  $C_{E'}B$  abgeschlossen. Dann ist  $f^{-1}(C_{E'}B)$  abgeschlossen.

Nun ist

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(E' \setminus C_{E'}B) = f^{-1}(E') \setminus f^{-1}(C_{E'}B)$$

also  $f^{-1}(B) = C_E(f^{-1}(C_{E'}B))$  und damit  $f^{-1}(B)$  offen.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  ist  $B := B(f(x_0), \varepsilon)$  offen in  $E'$ . Somit ist das Urbild

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)\}$$

offen in  $E$ . Der Punkt  $x_0$  gehört zu  $f^{-1}(B)$ , also gibt es eine Kugel  $B(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(B)$ .

**BEMERKUNG 5.2** Das Bild offener Mengen muss für stetige Abbildungen nicht notwendig offen sein. In der Tat ist für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f((-1, +1)) = [0, 1)$  und  $[0, 1)$  ist nicht offen.



### 5.3 Produkt stetiger Abbildungen

**THEOREM 5.2** Seien  $f : E \rightarrow E'$ ,  $g : E' \rightarrow E''$ ,  $E, E', E''$  metrische Räume sowie  $f$  stetig in  $x_0 \in E$  und  $g$  stetig in  $y_0 = f(x_0) \in E'$ . Dann ist  $h = g \circ f$  in  $x_0 \in E$  stetig. Ist  $f$  stetig auf  $E$  und  $g$  stetig auf  $E'$ , so ist  $h$  stetig auf  $E$ .

**Beweis.** Die Stetigkeit von  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$  bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : d'(g(y), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon,$$

die von  $f$  in  $x_0$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \delta^*(\delta) > 0 : d(x, x_0) < \delta^*(\delta) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \delta.$$

Setzt man  $\delta = \delta(\varepsilon)$  und  $y = f(x)$ , so erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{\delta}(\varepsilon) := \delta^*(\delta(\varepsilon)) > 0 :$$

$$d(x, x_0) < \tilde{\delta}(\varepsilon) \Rightarrow d''((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)) = d''(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon.$$

Die zweite Aussage des Satzes folgt aus der Stetigkeit in jedem Punkt.

**BEISPIEL 5.5** Die Abbildungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2 + 1$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(y) = \arctan y$  sind auf  $\mathbb{R}$  stetig. Somit ist auch die Abbildung  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x) = (g \circ f)(x) = \arctan(x^2 + 1)$  auf  $\mathbb{R}$  stetig.

### 5.4 Grenzwerte von Abbildungen

**DEFINITION 5.2** Seien  $(E, d)$ ,  $(E', d')$  metrische Räume,  $M \subset E$  eine Menge und  $x_0$  Häufungspunkt der Menge  $M$ . Die Abbildung  $f : M \rightarrow E'$  hat für gegen  $x_0$  strebendes  $x \in M$  den Grenzwert  $a \in E'$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in M, 0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), a) < \varepsilon,$$

in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) = a.$$

**BEISPIEL 5.6** Wir betrachten die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_2 > x_1^2, \\ 1 & \text{für } x_2 \leq x_1^2. \end{cases}$$

Dann ist  $x_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0, 0)$  Häufungspunkt von  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1^2\}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) = 0$ . Setzt man jedoch  $N = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ , so ist  $x_0$  zwar Häufungspunkt von  $N$ , aber  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0, x \in N} f(x)$ .

Im Spezialfall von Funktionen einer reellen Veränderlichen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  führt man noch die folgende Notation ein. Seien  $M^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > x_0\}$  und  $M^- = \{x \in \mathbb{R} : x < x_0\}$ . Dann bezeichnen

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M^+} f(x),$$

den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von  $f$  in  $x_0$ .

**BEISPIEL 5.7** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < -1, \\ x^2 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1 & \text{für } 1 < x \leq 2, \\ 2 & \text{für } x > 2, \end{cases}$$

besitzt die folgenden einseitigen Grenzwerte (vgl. Abb. 7).

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -1 - 0} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow -1 + 0} f(x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0 - 0} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow 0 + 0} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1 - 0} f(x) = 0, & \lim_{x \rightarrow 1 + 0} f(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 2 - 0} f(x) = 1, & \lim_{x \rightarrow 2 + 0} f(x) = 2. \end{array}$$

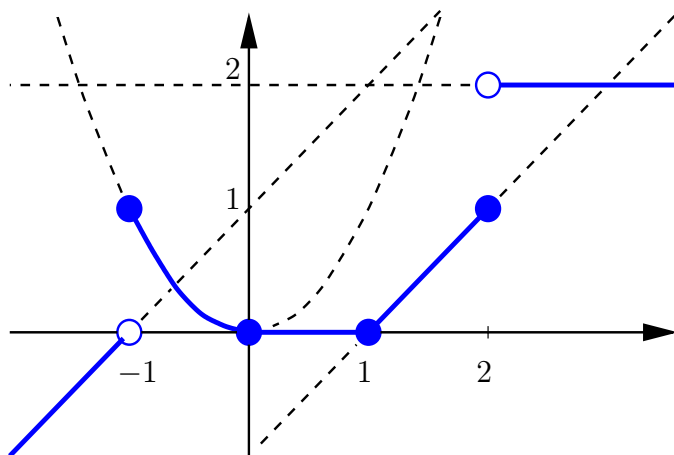


Abbildung 7: Stückweise definierte Abbildung  $f$  aus Beispiel 5.7

**THEOREM 5.3** (Stetigkeit – Grenzwert)

(i) Seien  $f : E \rightarrow E'$  in  $x_0 \in E$  stetig und  $x_0$  Berührungspunkt von  $M$ . Dann existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x)$  und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) = f(x_0).$$

(ii) Sei  $M$  Umgebung von  $x_0 \in E$ . Existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x)$  und gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) = f(x_0)$ , so ist  $f : M \rightarrow E'$  in  $x_0$  stetig.

**Beweis.** Der Beweis ergibt sich aus den Definitionen Stetigkeit und Grenzwert.

**THEOREM 5.4** (Grenzwert von Abbildungen – Grenzwert von Folgen)

Seien  $f : E \rightarrow E'$  und  $x_0$  Häufungspunkt von  $M \subset E$ . Dann hat  $f$  für gegen  $x_0$  strebendes  $x \in M$  genau dann den Grenzwert  $a$ , wenn für alle Folgen  $(x_n) \subset M$ , mit  $x_n \neq x_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  die Folge  $(f(x_n))$  in  $E'$  gegen  $a$  konvergiert.

**Beweis.** Seien zunächst  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) = a$  und  $(x_n)$  eine beliebige Folge mit den oben angegebenen Eigenschaften. Aus der Grenzwertdefinition folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in M, 0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), a) < \varepsilon.$$

Somit gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Indexschranke  $n_0(\delta(\varepsilon))$ , so dass für alle  $n > n_0$

$$d(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad d'(f(x_n), a) < \varepsilon.$$

Seien nun umgekehrt alle Zahlenfolgen  $(f(x_n))$  in  $E'$  gegen  $a$  konvergent. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass  $f$  für gegen  $x_0$  strebendes  $x \in M$  nicht den Grenzwert  $a$  besitzt. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  derart, dass für jedes  $\delta = 1/n$  ein  $x_n \in M$  existiert mit  $d(x_n, x_0) < 1/n$  und  $d(f(x_n), a) \geq \varepsilon$ . Somit konvergiert zwar  $x_n \rightarrow x_0$  aber  $f(x_n) \not\rightarrow a$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

## 5.5 Reelle vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Bezeichnen wir die  $j$ -te Komponente der vektorwertigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so entsprechen einer vektorwertigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $m$  skalare Funktionen  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**THEOREM 5.5** Die vektorwertige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  genau dann stetig, wenn jede Komponente  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  in  $x_0$  stetig ist.

**Beweis.** Aus der Stetigkeit der vektorwertigen Funktion  $f$  folgt wegen

$$d'((f(x), f(x_0))) = \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(x) - f_i(x_0)| \geq |f_j(x) - f_j(x_0)| \quad 1 \leq j \leq m$$

die Stetigkeit für jede Komponente  $f_j, j = 1, \dots, m$ . Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit der Komponenten  $f_j, j = 1, \dots, m$  zu jedem  $\varepsilon > 0$  die Existenz von  $\delta_j(\varepsilon) > 0$  mit

$$d(x, x_0) < \delta_j(\varepsilon) \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon.$$

Setzt man  $\delta(\varepsilon) := \min_{1 \leq j \leq m} \delta_j(\varepsilon)$ , so folgt aus  $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $j$ , d.h., auch  $d'(F(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

## Rechenregeln für Grenzwerte reeller Funktionen

(i) Für vektorwertige Funktionen und Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) \pm \beta \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} g(x),$$

falls die auf der rechten Seite stehenden Grenzwerte existieren.

(ii) Für skalare Funktionen gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} g(x),$$

falls die auf der rechten Seite stehenden Grenzwerte existieren.

(iii) Für skalare Funktionen gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} g(x)},$$

vorausgesetzt, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} g(x) \neq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in M} f(x)$  existiert.

**FOLGERUNG 5.1** *Summe, Differenz, Produkt und Quotient (Nenner  $\neq 0$ ) stetiger Funktionen sind stetig.*

**BEISPIEL 5.8** *Polynome  $n$ -ten Grades (auch ganzrationale Funktionen genannt),*

*gegeben durch  $p_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ , ( $p_n \neq 0$ ), sind auf  $\mathbb{R}$  stetige Funktionen.*

**BEISPIEL 5.9** *Gebrochen rationale Funktionen*

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \quad \text{wobei } q_m(x) \neq 0,$$

*und  $p_n, q_m$  Polynome  $n$ -ten bzw.  $m$ -ten Grades sind, sind in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$ , in dem  $q_m(x) \neq 0$ , stetig.*

## 5.6 Kompaktheit

**DEFINITION 5.3** Sei  $A \subset E$  eine Teilmenge des metrischen Raumes  $(E, d)$ . Eine Familie von Mengen  $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  heißt offene Überdeckung von  $A$ , wenn

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda, \quad O_\lambda \text{ offen } \forall \lambda \in \Lambda.$$

$A$  heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von  $A$  ein endliches Teilsystem enthält, das zur Überdeckung von  $A$  ausreicht.

**BEISPIEL 5.10** Die leere Menge  $\emptyset$  ist kompakt. Die Menge  $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  ist kompakt. Die Menge  $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  ist nichtkompakt.

**Beweis.** Die erste Aussage ist trivial. Sei nun  $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  eine offene Überdeckung von  $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ . Dann gibt es ein  $\lambda_0$  mit  $0 \in O_{\lambda_0}$ . Wegen  $1/n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , gibt es ein  $n_0$ , so dass für  $n \geq n_0$  bereits alle bis auf endlich viele der Punkte  $1/n$  von  $O_{\lambda_0}$  überdeckt werden. Zu den verbleibenden endlich vielen Punkten  $1/n$ ,  $1 \leq n \leq n_0$ , gibt es endlich viele offene Mengen aus  $O_\lambda$ , die diese Punkte überdecken. Um zu zeigen, dass die Menge  $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  nicht kompakt ist, betrachten wir die offene Überdeckung

$$\left\{ B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{3n^2}\right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

aus der (weil sie aus paarweise durchschnittsfremden Kugel besteht) kein Teilsystem ausgewählt werden kann, das zur Überdeckung ausreicht.

**THEOREM 5.6** Im metrischen Raum ist jede kompakte Menge  $A$  beschränkt und abgeschlossen.

**Beweis.**  $\{B(0, r) : r \in \mathbb{R}^+\}$  ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $A$ . Da ein endliches Teilsystem existiert, gibt es ein  $R > 0$ , so dass  $B(0, R)$  die Menge  $A$  überdeckt. Nun gilt wegen  $x, y \in A \Rightarrow x, y \in B(0, R)$  sicher  $d(x, y) < 2R$ . Um die Abgeschlossenheit von  $A$  zu zeigen, betrachten wir  $x \in C_E A$ . Dann ist  $\{B(y, d(x, y)/2) : y \in A\}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , aus der ein endliches Teilsystem  $\{B(y_i, d(x, y_i)/2) : 1 \leq i \leq N\}$  ausgewählt werden kann, das zur Überdeckung von  $A$  ausreicht. Wir setzen

$$r := \min_{1 \leq i \leq N} \frac{d(x, y_i)}{2} > 0$$

und haben  $B(x, r) \cap B(y_i, r) = \emptyset$ , für  $i = 1, \dots, N$ . Also liegt  $B(x, r)$  im Komplement von  $A$  bezüglich  $E$ .

Die folgende Charakterisierung kompakter Mengen in  $\mathbb{R}^n$  geht auf *E. Heine, 1821-1881* und *E. Borel, 1871-1956* zurück.

**THEOREM 5.7** (Heine-Borel)

Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Da in jedem metrischen Raum kompakte Mengen beschränkt und abgeschlossen sind, müssen wir nur die Gegenrichtung beweisen.

Hierzu führen wir zunächst den Begriff Folgenkompaktheit ein.

**DEFINITION 5.4** Eine Teilmenge  $A \subset E$  heißt folgenkompakt, wenn jede Folge aus  $A$  eine in  $A$  konvergente Teilfolge besitzt.

**FOLGERUNG 5.2** Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

**Beweis.** Wir müssen zeigen, dass eine Teilmenge  $A$  genau dann kompakt ist, wenn jede Folge in  $A$  einen Häufungspunkt in  $A$  besitzt. Zunächst sei  $A$  kompakt und  $(x_n)$  eine Folge aus  $A$ . Angenommen die Folge habe keinen Häufungspunkt in  $A$ . Dann finden wir zu jedem  $x \in A$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$ , in der höchstens endlich viele Folgenglieder liegen. Nun bildet  $\{U_x : x \in A\}$  eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $A$ , so dass ein endliches Teilsystem zur Überdeckung bereits ausreicht. Da jedes  $U_x$  nur endlich viele Folgenglieder enthält, kann das endliche Teilsystem  $A$  nicht überdecken. Also hat die Folge einen Häufungspunkt in  $A$ .

Die Umkehrung zeigen wir in zwei Schritten. Sei  $A$  eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass in ihr jede Folge einen Häufungspunkt in  $A$  besitzt.

(a) Dann ist  $A$  totalbeschränkt, d.h., zu jedem  $r > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_n \in A$  mit  $A \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$ . Angenommen,  $A$  sei nicht totalbeschränkt. Dann gibt es ein  $r > 0$  und ein  $x_1 \in A$ , so dass  $A$  nicht in  $B(x_1, r)$  enthalten ist. Also gibt es ein  $x_2 \in A \setminus B(x_1, r)$ , so dass  $A$  nicht in  $B(x_2, r) \cup B(x_1, r)$  enthalten ist. Induktiv definiert man somit eine Folge  $(x_k)$  in  $A$  mit der Eigenschaft, dass  $x_{k+1}$  nicht zu  $\cup_{i=1}^k B(x_i, r)$  gehört. Nach Voraussetzung besitzt die Folge einen Häufungspunkt  $x$  in  $A$ . Also gibt es Indizes  $m, N$ , für die  $d(x_N, x) < r/2$  und  $d(x_{N+m}, x) < r/2$ . Nach der Dreiecksungleichung gilt dann

$$d(x_N, x_{N+m}) \leq d(x_N, x) + d(x, x_{N+m}) < r,$$

d.h.,  $x_{N+m}$  liegt in  $B(x_N, r)$  was nach Konstruktion der Folge  $(x_k)$  ausgeschlossen ist.

(b) Sei nun  $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Da  $A$  totalbeschränkt ist, gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  endlich viele offene Kugeln mit Radien  $1/k$  und Mittelpunkten in  $A$ , welche  $A$  überdecken. Angenommen es gäbe kein

endliches Teilsystem von  $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ , das zur Überdeckung von  $A$  ausreicht. Dann finden wir zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine dieser endlich vielen offenen Kugeln mit Radius  $1/k$ , sie heiße  $B_k$ , so dass  $A \cap B_k$  nicht durch endlich viele  $O_\lambda$  überdeckt wird. Sei der Mittelpunkt von  $B_k$  mit  $x_k$  bezeichnet. Dann ist  $(x_k)$  eine Folge in  $A$ , die nach Voraussetzung einen Häufungspunkt  $x^* \in A$  besitzt. Sei nun  $\lambda^*$  ein Index für den  $x^* \in O_{\lambda^*}$ . Da  $O_{\lambda^*}$  offen, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B(x^*, \varepsilon) \subset O_{\lambda^*}$ . Da  $x^*$  Häufungspunkt von  $(x_k)$ , gibt es ein  $M > 2/\varepsilon$  mit  $d(x_M, x^*) < \varepsilon/2$ . Somit haben wir für jedes  $x \in B_M$  die Abschätzung

$$d(x, x^*) \leq d(x, x_M) + d(x_M, x^*) < \frac{1}{M} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was  $B_M \subset B(x^*, \varepsilon) \subset O_{\lambda^*}$  bedeuten würde. Letzteres widerspricht aber der Konstruktion von  $B_M$ .

**Beweis des Satzes von Heine-Borel.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Menge, dann existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß zu jeder Folge  $(x_n)$  aus  $A$  eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  in  $A$  liegt.

**DEFINITION 5.5** Eine Abbildung  $f : A \subset E \rightarrow E'$  heißt auf  $A$  gleichmäßig stetig, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass

$$\forall x, y \in A, \quad d(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Offensichtlich ist eine auf  $A$  stetige Abbildung in jedem Punkt  $x_0 \in A$  gleichmäßig stetig. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 5.11** Die Abbildung  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/x$  ist in jedem Punkt  $x_0 \in (0, 1)$  stetig, aber auf  $(0, 1)$  nicht gleichmäßig stetig.

**THEOREM 5.8** Seien  $f : A \subset E \rightarrow E'$  in jedem Punkt von  $A$  stetig und  $\emptyset \neq A$  kompakt. Dann ist  $f$  auf  $A$  gleichmäßig stetig.

**Beweis.** Seien  $\varepsilon > 0$  und  $x_0 \in A$  beliebig. Da  $f$  auf  $A$  stetig ist, gibt es ein  $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$  derart, dass

$$d(x, x_0) < \delta(\varepsilon, x_0) \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Die Familie  $\{B(x_0, \delta(\varepsilon, x_0)/2) : x_0 \in A\}$  ist eine offene Überdeckung von  $A$ . Da  $A$  kompakt war, reicht das endliche Teilsystem  $\{B(x_{i_0}, \delta(\varepsilon, x_{i_0})/2) : x_{i_0} \in A\}$ ,  $i = 1, \dots, N$  zur Überdeckung von  $A$  aus. Wir setzen

$$\delta(\varepsilon) := \min_{1 \leq i \leq N} \frac{\delta(\varepsilon, x_{i_0})}{2} > 0.$$

Seien nun  $x, y \in A$  mit  $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ . Dann gibt es ein  $x_{i_0}$  mit  $x \in B(x_{i_0}, \delta(\varepsilon, x_{i_0})/2)$ .  
Nun ist

$$d(y, x_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, x_{i_0}) < \delta(\varepsilon) + \frac{\delta(\varepsilon, x_{i_0})}{2} \leq \delta(\varepsilon, x_{i_0}),$$

woraus

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_{i_0})) + d'(f(x_{i_0}), f(y)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

folgt.

**THEOREM 5.9** *Seien  $f : A \subset E \rightarrow E'$  in jedem Punkt von  $A$  stetig und  $\emptyset \neq A$  kompakt. Dann ist das Bild  $f(A)$  in  $E'$  kompakt.*

**Beweis.** Wir benötigen zunächst das folgende Lemma.

**LEMMA 5.1** *Seien  $A \subset E$  und  $(E, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $B \subset A$  ist genau dann offen im Teilraum  $(A, d)$ , wenn es eine offene Menge  $B^*$  in  $E$  gibt, mit  $B = B^* \cap A$ .*

**Beweis des Lemmas.** Sei  $B^*$  offen in  $E$  und  $B := B^* \cap A$ . Zu jedem  $x \in B^*$  gibt es eine Kugel  $B(x, r) \subset B^*$  in  $E$ . Ist nun  $x \in B$  beliebig, so gibt es eine Kugel  $B(x, r) \cap A$  in  $A$  mit  $B(x, r) \cap A \subset B^* \cap A$ . Sei nun umgekehrt  $B$  offen im Teilraum  $A$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in B$  eine Kugel  $B(x, r(x)) \cap A$  in  $A$ , mit  $B(x, r(x)) \cap A \subset B$ . Die Vereinigung aller  $B(x, r(x))$  für  $x \in B$  ist in  $E$  offen und es gilt

$$B = \cup_{x \in B} (A \cap B(x, r(x))) = A \cap (\cup_{x \in B} B(x, r(x))).$$

Sei  $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  eine offene Überdeckung von  $f(A) \subset E'$ . Da  $f$  auf  $A$  stetig ist, bildet das System von Urbildern

$$\{f^{-1}(O_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

im Teilraum  $(A, d)$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Nach dem Lemma gibt es offene Mengen  $V_\lambda$  in  $E$ , mit  $f^{-1}(O_\lambda) = V_\lambda \cap A$ , so da  $\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  die kompakte Menge  $A$  überdeckt. Nun reicht aber bereits ein endliches Teilsystem  $\{V_{\lambda_i} : 1 \leq i \leq N\}$  zur Überdeckung von  $A$  aus. Dann bildet auch  $\{O_{\lambda_i} : 1 \leq i \leq N\}$  ein endliches Teilsystem, das  $f(A)$  überdeckt.

**THEOREM 5.10** *(1. und 2. Satz von K. Weierstraß, 1815-1897)*

*Seien  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $A$  stetig und  $\emptyset \neq A$  kompakt. Dann ist  $f$  auf  $A$  beschränkt und es gibt Punkte  $a, b \in A$  mit*

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{und} \quad f(b) = \sup_{x \in A} f(x).$$



**Beweis.** Zunächst ist  $f(A) \subset \mathbb{R}$  kompakt, damit beschränkt und es existieren  $\inf_{x \in A} f(x)$  und  $\sup_{x \in A} f(x)$ . Angenommen, dass

$$f(x) < \sup_{x \in A} f(x) =: M \quad \forall x \in A.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = 1/(M - f(x))$ , die auf  $A$  stetig und demzufolge beschränkt ist. Somit existiert ein  $K > 0$  mit  $1/(M - f(x)) < K$  für alle  $x \in A$ . Äquivalent hierzu ist  $f(x) < M - 1/K < M$  im Widerspruch zur Definition von  $M$  als kleinste obere Schranke.

## 6 Spezielle Eigenschaften reeller Funktionen

### 6.1 Monotonie und Existenz der inversen Funktion

**DEFINITION 6.1**  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $A$  (streng) monoton wachsend, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2)).$$

$f$  heißt auf  $A$  (streng) monoton fallend, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)).$$

**BEISPIEL 6.1**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/x$  ist auf  $(-\infty, 0)$  und auf  $(0, +\infty)$  streng monoton fallend, jedoch nicht auf  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

**THEOREM 6.1** (Existenz der inversen Funktion)

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $A$  streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend) und  $B = f(A)$ . Dann existiert die inverse Funktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$  und ist auf  $B$  streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend).

**Beweis.** Zu zeigen ist, dass  $f : A \rightarrow B$  bijektiv ist.

(i)  $f$  ist surjektiv, denn  $B = f(A)$ .

(ii)  $f$  ist injektiv, denn  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Also existiert  $f^{-1} : B \rightarrow A$ . Seien nun  $y_1, y_2 \in B$  mit  $y_1 < y_2$ . Dann muss für  $x_1 := f^{-1}(y_1)$  und  $x_2 := f^{-1}(y_2)$  gelten  $x_1 < x_2$ .

**THEOREM 6.2** (Stetigkeit der inversen Funktion)

Sei  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend),  $B = f((a, b))$  und  $f$  in  $x_0 \in (a, b)$  stetig. Dann ist  $f^{-1} : B \rightarrow (a, b)$  im Punkt  $y_0 = f(x_0)$  stetig.

**Beweis.** Siehe Dieudonné, Punkt 4.2.2.

**BEMERKUNG 6.1** Aus  $f : A \rightarrow B$  bijektiv und  $f$  im Punkt  $x_0$  stetig, folgt im allgemeinen nicht, dass  $f^{-1} : B \rightarrow A$  in  $y_0 = f(x_0)$  stetig ist. (Vgl. Dieudonné: Grundzüge der Analysis I, Kapitel 3.12, Übungsaufgabe 1)

## 6.2 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

**DEFINITION 6.2** Sei  $f : (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  unstetig. Existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , so heißt  $f$  in  $x_0$  hebbar unstetig.

**Beachte:** Die Funktion  $g : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $g(x_0) = a$  und  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ , ist im Punkt  $x_0$  stetig.

**BEISPIEL 6.2** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = (\sin x)/x$  hat in  $x_0 = 0$  den Grenzwert 1 (Begründung später).  $f$  ist damit in  $x_0 = 0$  hebbar unstetig.

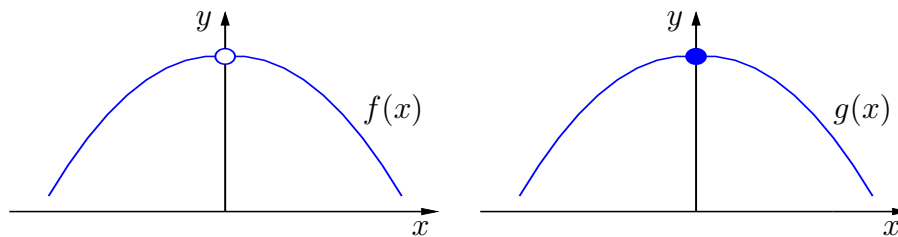


Abbildung 8: Die hebbare unstetige Abbildung  $f$  und ihre stetige Erweiterung  $g$

**DEFINITION 6.3** Seien  $a_r, a_l$  der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert von  $f$  in  $x_0$  und  $a_r \neq a_l$ . Dann hat  $f$  in  $x_0$  einen Sprung der Höhe  $a_r - a_l$ .

**DEFINITION 6.4** Hebbare Unstetigkeitsstellen und Sprungstellen heißen Unstetigkeitsstellen 1. Art. Eine Unstetigkeitsstelle 2. Art liegt vor, wenn mindestens ein einseitiger Grenzwert nicht existiert.

**BEISPIEL 6.3** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x - [x]$  hat in den ganzzahligen Punkten Sprungstellen der Höhe  $-1$ . Hierbei bezeichnet  $[x]$  den ganzen Teil von  $x$ , d.h., die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $x$  ist (vgl. Abb. 9).

**BEISPIEL 6.4** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/x$  hat in  $x_0 = 0$  keinen rechtsseitigen Grenzwert, also eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (Polstelle) (vgl. Abb. 10, links).

**BEISPIEL 6.5** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sin(1/x)$  hat in  $x_0 = 0$  keine einseitigen Grenzwerte, also eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (Oszillationsstelle) (vgl. Abb. 10, rechts).

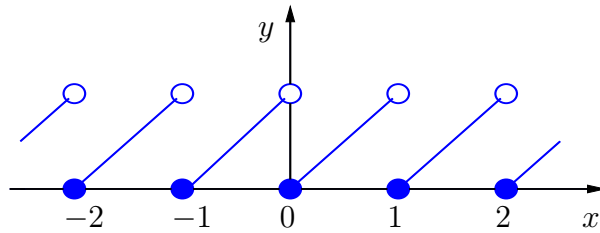


Abbildung 9: Sprungstellen der Funktion  $f(x) = x - [x]$

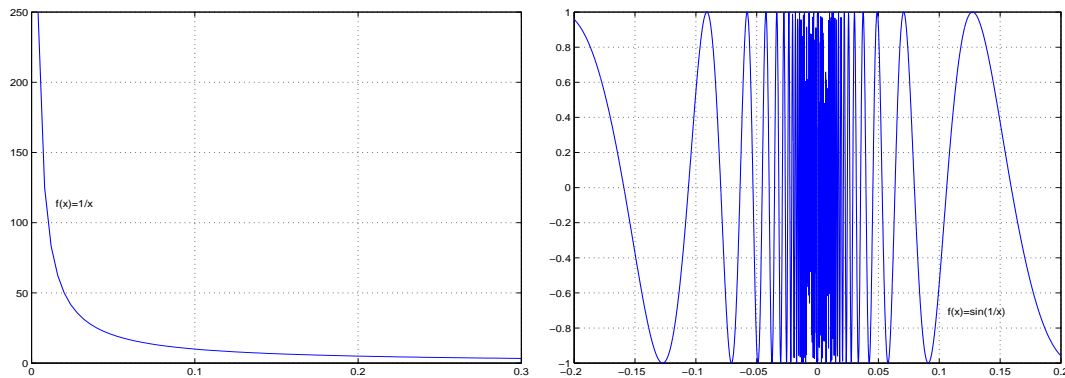


Abbildung 10: Unstetigkeitsstellen 2. Art. links Polstelle, rechts Oszillationsstelle

### 6.3 Zwischenwertsätze

**LEMMA 6.1** Seien  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in \mathbb{R}$  stetig und  $f(x_0) \neq 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U(x_0)$ , in der  $f$  das gleiche Vorzeichen wie  $f(x_0)$  hat.

**Beweis.** Sei o.B.d.A.  $f(x_0) > 0$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x_0$  folgt für  $\varepsilon := f(x_0)/2$  die Existenz einer Umgebung  $B(x_0, \delta(\varepsilon))$  mit

$$x \in B(x_0, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow 0 < f(x_0)/2 = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

**THEOREM 6.3** (Existenz einer Nullstelle)

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a)f(b) < 0$ . Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$ , so dass  $f(\xi) = 0$ .

**Beweis.** O.B.d.A. gelte  $f(a) > 0$ . Betrachten die Menge

$$M := \{z \in [a, b] : f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, z]\} \neq \emptyset.$$

$M$  ist als Teilmenge von  $[a, b]$  beschränkt, d.h., es existiert  $\sup M = \xi$ . Ist  $f(\xi) > 0$ , so gibt es nach obigem Lemma eine Umgebung, in der  $f(x) > 0$ . Somit

gilt  $\xi \neq a$ . Wegen  $f(b) < 0$  entfällt auch  $\xi = b$ .

Aus dem obigen Satz kann eine einfache Methode zur Nullstellenbestimmung (Halbierungsalgorithmus) abgeleitet werden. Seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann halbiert man das Intervall  $[a, b]$  und berechnet  $f((a + b)/2)$ . Ist  $(a + b)/2$  keine Nullstelle, so erfüllt eines der Intervalle  $[a, (a + b)/2]$  und  $[(a + b)/2, b]$  die Voraussetzungen des Satzes. Iterativ kann so eine Nullstelle von  $f$  beliebig genau eingeschlossen und damit approximiert werden.

**THEOREM 6.4** (*Zwischenwertsatz*)

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  stetig,  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  und  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Dann gibt es zu jedem  $y \in (m, M)$  (mindestens) ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = y$ .

**Beweis.** Betrachte die Hilfsfunktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi(x) := f(x) - y.$$

Nach dem Satz von Weierstraß gibt es Punkte  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , in denen  $f$  das Minimum bzw. das Maximum auf  $[a, b]$  annimmt. Sei o.B.d.A.  $x_1 < x_2$ . Dann ist  $\varphi$  auf  $[x_1, x_2]$  stetig und  $\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$ . Somit gibt es ein  $\xi \in (x_1, x_2)$  mit  $0 = \varphi(\xi) = f(\xi) - y$ .

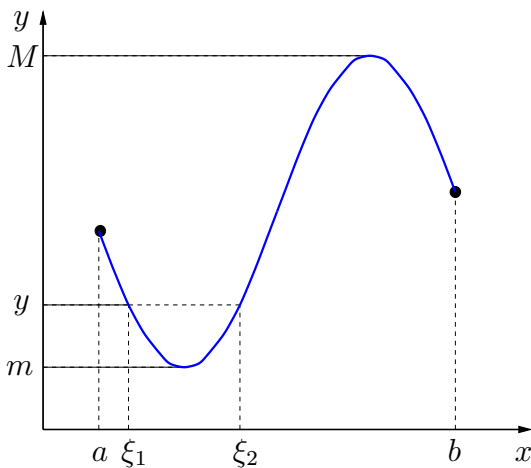


Abbildung 11: Existenz eines  $\xi$  mit  $f(\xi) = y$  nach dem Zwischenwertsatz

## 7 Reihen in normierten Räumen

### 7.1 Begriff des normierten Raumes

Bislang wurde auf einer beliebigen Menge  $E$  ein Abstand definiert und damit auf  $E$  eine Topologie eingeführt. Wir betrachten jetzt den Fall, dass  $E$  ein Vektorraum ist, dessen Struktur mit der Topologie von  $E$  verträglich ist.

**DEFINITION 7.1** Eine Menge  $E$  heißt Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , wenn auf  $E$  zwei Operationen

$$\begin{aligned}x, y \in E &\rightarrow x + y \in E, \\(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E &\rightarrow \lambda x \in E,\end{aligned}$$

erklärt sind, die folgenden Eigenschaften genügen:

**I.1**  $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in E,$

**I.2**  $x + y = y + x \quad \forall x, y \in E,$

**I.3**  $\exists 0 \in E : \quad x = 0 + x \quad \forall x \in E,$

**I.4**  $\forall x \in E \quad \exists(-x) \in E : \quad x + (-x) = 0,$

**II.1**  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},$

**II.2**  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

**II.3**  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},$

**II.4**  $\exists 1 \neq 0 : \quad 1x = x, \quad \forall x \in E.$

**DEFINITION 7.2** Eine Norm  $\|\cdot\|$  auf einem Vektorraum  $E$  ist eine Abbildung von  $E$  in  $\mathbb{R}_0^+$  mit folgenden Eigenschaften:

**(N1)**  $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \forall x \in E,$

**(N2)**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},$

**(N3)**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E.$

**FOLGERUNG 7.1** Ist  $x \rightarrow \|x\|$  eine Norm auf  $E$ , so ist  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Abstandsfunktion auf  $E$ .

**Beweis.** Man prüft unmittelbar (M1)-(M3) nach.

**DEFINITION 7.3**  $(E, \|\cdot\|)$  heißt normierter Raum. Der auf  $E$  definierte Abstand  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , wobei  $d(x, y) := \|x - y\|$ , heißt der durch  $\|\cdot\|$  induzierte Abstand. In diesem Sinne wird ein normierter Raum stets als metrischer Raum aufgefaßt. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Die Dreiecksungleichung kann auf endlich viele Summanden erweitert werden, d.h., es gilt für beliebige  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

**Beweis.** Vollständige Induktion.

**BEISPIEL 7.1** Auf der Menge  $\mathbb{R}^n$  werden durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

verschiedene Normen eingeführt. Insbesondere induzieren  $\|\cdot\|_1$  die Manhattan-Metrik,  $\|\cdot\|_2$  die Euklidische Metrik und  $\|\cdot\|_\infty$  die Produktmetrik.

**BEISPIEL 7.2** Der Raum aller quadratischen Matrizen ist ein linearer Vektorraum. Sei  $A = (a_{ij})$  eine quadratische Matrix. Dann heißen

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &:= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 &:= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \\ \|A\|_\infty &:= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

die Spaltensummennorm, die Frobeniusnorm und die Zeilensummennorm.

## 7.2 Reihenbegriff

**DEFINITION 7.4** Sei  $(E, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge von Elementen aus  $E$ . Dann heißen

$$s_n := \sum_{i=0}^n a_i$$

Partialsomme,  $(s_n)_{n \geq 0}$  die Folge der Partialsummen oder Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $a_n$   $n$ -tes Glied der Reihe. Konvergiert die Folge der Partialsummen  $(s_n)$  gegen  $s$ , so heißt die Reihe konvergent und  $s$  Summe der Reihe, divergiert die Folge der Partialsummen, so heißt die Reihe divergent.

**Beachte:** Es hat sich eingebürgert, mit dem Symbol  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  gleichzeitig zwei unterschiedliche Objekte zu bezeichnen, einerseits die Folge der Partialsummen und andererseits ihren Grenzwert (also die Summe der Reihe). Ferner ist der Reihenbegriff nicht am kleinsten Index 0 gebunden, jede ganze Zahl kann hierfür verwendet werden.

**BEISPIEL 7.3** (Geometrische Reihe)

Seien  $E = \mathbb{C}$ ,  $\|\cdot\| := |\cdot|$ ,  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ . Für die  $n$ -te Partialsumme haben wir

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Damit gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

### 7.3 Konvergenzkriterien für Reihen in normierten Räumen

**THEOREM 7.1** (Cauchy Kriterium)

Im normierten Raum  $E$  ist die Forderung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) : \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i \right\| < \varepsilon$$

notwendig für die Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ . In einem Banachraum ist sie auch hinreichend.

**Beweis.** Anwendung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums für die Folge der Partialsummen.

**THEOREM 7.2** (Notwendiges Konvergenzkriterium)

Ist die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  konvergent, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Beweis.** Setze im Cauchyschen Konvergenzkriterium  $m = n + 1$ , so folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon) : \|a_{n+1}\| < \varepsilon.$$

Somit gilt für alle  $n > n_1(\varepsilon) := n_0(\varepsilon) + 1$  die Beziehung  $d(a_n, 0) = \|a_n\| < \varepsilon$ .



**BEMERKUNG 7.1** Sei  $E = \mathbb{R}$ . Wegen  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n + 1)$ , ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(2n + 1)$  divergent.

**DEFINITION 7.5** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  heißt absolut konvergent, wenn die Zahlenreihe (mit positiven Gliedern)  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$  konvergiert.

**THEOREM 7.3** In einem Banachraum  $E$  ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

**Beweis.** Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

(i) Notwendigkeit des Cauchyschen Konvergenzkriteriums

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \quad \sum_{i=n+1}^m \|a_i\| < \varepsilon.$$

(ii) Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{i=n+1}^m a_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|a_i\|.$$

(iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  genügt dem Cauchyschen Konvergenzkriterium im Banachraum  $E$ .

## 7.4 Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern

Im folgenden betrachten wir  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit  $a_n \in \mathbb{R}_+$ . Dann ist die Partialsummenfolge strikt wachsend, denn

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{i=0}^{n+1} a_i - \sum_{i=0}^n a_i = a_{n+1} > 0$$

und die Konvergenz der Folge  $(s_n)_{n \geq 0}$  ist äquivalent mit ihrer Beschränktheit.

**THEOREM 7.4** Für Reihen mit positiven Gliedern gilt folgende Äquivalenz

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ konvergent} \Leftrightarrow \left( \sum_{i=0}^n a_i \right)_{n \geq 0} \text{ beschränkt.}$$

**DEFINITION 7.6** Für die Glieder der Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  gelte ab einem bestimmten Index  $i_0$ ,  $0 < a_i \leq b_i \forall i > i_0$ . Dann heißt die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  Minorante zur Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  und die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  Majorante zur Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ .

**THEOREM 7.5** (*Vergleichskriterium*)

Jede Minorante einer konvergenten Majorante ist konvergent. Jede Majorante einer divergenten Minorante ist divergent.

**Beweis.** Seien  $s_n^a$  und  $s_n^b$  die Partialsummen der Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ . Dann gilt

$$s_n^a = \sum_{i=0}^{i_0} (a_i - b_i) + \sum_{i=0}^{i_0} b_i + \sum_{i=i_0+1}^n a_i \leq \sum_{i=0}^{i_0} (a_i - b_i) + s_n^b,$$

so dass die Beschränktheit von  $s_n^a$  aus der Beschränktheit von  $s_n^b$  folgt. Ist  $(s_n^a)$  unbeschränkt, so ist auch  $(s_n^b)$  unbeschränkt.

**THEOREM 7.6** (*Quotientenkriterium*)

Für die Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern gelte ab einem bestimmten Index  $n_0$  :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent. Gilt dagegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.

**Beweis.** Die erste Aussage folgt aus

$$a_{n+1} \leq a_{n_0} q^{1-n_0} q^n \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

da die geometrische Reihe eine konvergente Majorante ist. Die Divergenz der Reihe folgt aus

$$a_{n+1} \geq a_{n_0} > 0, \quad \text{also } \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \geq a_{n_0} > 0,$$

da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist.

**THEOREM 7.7** (*Wurzelkriterium*)

Für die Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern gelte ab einem bestimmten Index  $n_0$  :

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent. Gilt dagegen

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.

**Beweis.** Die Konvergenz ergibt sich aus

$$a_n \leq q^n \quad \forall n \geq n_0,$$

d.h., die geometrische Reihe ist eine konvergente Majorante. Die Divergenz folgt aus  $a_n \geq 1$  für alle  $n \geq n_0$ , da das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt ist.

**FOLGERUNG 7.2** (*Limes-Variante des Wurzelkriteriums*)

Für die Glieder  $a_n$  einer Reihe mit positiven Gliedern gelte

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Ist  $r < 1$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Ist  $r > 1$ , so divergiert die Reihe.

**Beweis.** Sei zunächst  $r < 1$ . Dann gibt es ein  $q \in (r, 1)$ . Da  $r$  größter Häufungspunkt der Folge  $(\sqrt[n]{a_n})_{n \geq 0}$  ist, gibt es höchstens endlich viele Elemente der entsprechenden Folge, die in  $(q, \infty)$  liegen. Also ist das Wurzelkriterium anwendbar. Ist nun  $r > 1$ , so gibt es in  $B(r, r - 1)$  unendlich viele Glieder der Folge, für die  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  gilt. Damit ist das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllbar.

**BEISPIEL 7.4** Die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.

Die Voraussetzungen für die Anwendung des Wurzelkriterium bzw. des Quotientenkriteriums sind nicht erfüllt. Wir zeigen, dass eine Teilfolge der Partialsummenfolge unbeschränkt ist. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Damit gilt

$$s_{2^n} = s_1 + \sum_{k=1}^n (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + 1.$$

**BEISPIEL 7.5** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist für  $\alpha > 1$  konvergent.

Die Folge der Partialsummen wächst monoton. Zum Nachweis der Konvergenz genügt daher zu zeigen, dass eine Teilfolge beschränkt ist. Für  $n \geq 2$  gilt

$$s_{2^n-1} - s_{2^{n-1}-1} = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq (2^n - 1 - 2^{n-1} + 1) \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^\alpha = (2^{1-\alpha})^{n-1}.$$

Damit haben wir für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= s_1 + \sum_{k=2}^n (s_{2^k-1} - s_{2^{k-1}-1}) < 1 + \sum_{k=2}^n (2^{1-\alpha})^{k-1} \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

**BEISPIEL 7.6** Die komplexe Zahlenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+i)}$  ist absolut konvergent.

In der Tat ist wegen

$$\left| \frac{1}{k(k+i)} \right| = \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} < \frac{1}{k^2}$$

die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  eine konvergente Majorante.

## 7.5 Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

**DEFINITION 7.7** Eine reelle Zahlenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  heißt *alternierend*, wenn für alle Indizes  $n \geq 0$  die Beziehung  $a_{n+1}a_n < 0$  gilt.

**THEOREM 7.8** (Leibniz-Kriterium)

Die reelle Zahlenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  sei alternierend und die Folge  $(|a_n|)_{n \geq 0}$  konvergiere monoton gegen Null. Dann ist die alternierende Reihe konvergent und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

**Beweis.** Wir setzen  $\alpha_n := |a_n| > 0$ . Nach Voraussetzung gilt dann

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \alpha_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes  $n$  sei  $\gamma_n = \pm 1$  derart gewählt, dass  $\gamma_n a_{n+1} > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma_n (s_{n+p} - s_n) &= \gamma_n \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} - \alpha_{n+4} + \dots + (-1)^{p-1} \alpha_{n+p}, \\ &= (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+4}) + \dots \geq 0, \quad \text{und} \\ \gamma_n (s_{n+p} - s_n) &= \alpha_{n+1} - (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) - \dots \leq \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Da  $(\alpha_n)$  eine Nullfolge ist, finden wir zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon)$ , so dass für alle  $p \geq 0$ ,  $n > n_0(\varepsilon)$

$$|s_{n+p} - s_n| \leq \alpha_{n+1} < \varepsilon.$$

Da  $\mathbb{R}$  ein Banachraum ist, folgt aus dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz der Zahlenreihe. Für  $p \rightarrow \infty$  erhalten wir die Fehlerabschätzung.

### BEISPIEL 7.7 (Alternierende harmonische Reihe)

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  konvergiert nicht absolut, denn  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  erfüllt aber alle Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums und ist daher konvergent.

## 7.6 Rechenregeln für Reihen

### 7.6.1 Linearkombination von Reihen

Konvergieren die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  im normierten Raum  $(E, \|\cdot\|)$ , und sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

### 7.6.2 Umordnung von Reihen

Für endliche Summen gelten das Kommutativ- und Assoziativgesetz, d.h., die Glieder der endlichen Summe können beliebig zusammengefasst werden. Frage: Gilt diese Eigenschaft auch für Reihen? Zunächst müssen wir klären, was wir unter 'beliebig zusammenfassen' verstehen wollen.

**DEFINITION 7.8** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe im normierten Raum und  $\varphi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine bijektive Abbildung. Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  mit  $b_n = a_{\varphi(n)}$  eine Umordnung der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe mit der Summe  $s$ , sei also

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Die Partialsummenfolgen der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right)$$

sind Teilfolgen der alternierenden harmonischen Reihe und haben daher den gleichen Grenzwert  $s$ . Multipliziert man erstere mit  $1/2$  und addiert sie zur zweiten, so erhält man

$$\frac{3}{2}s = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right). \quad (1)$$

Nehmen wir an, dass eine konvergente Reihe umgeordnet werden kann, ohne dass sich ihre Summe ändert. Wir fassen jeweils zwei positive Summanden der alternierenden harmonischen Reihe zusammen und ziehen dann einen negativen Summanden ab. Dann ist die Partialsummenfolge der Reihe (1) eine Teilfolge der umgeordneten alternierenden Reihe und muss demzufolge die Summe  $s$  haben. Sie hat aber die Summe  $3s/2$ , woraus  $s = 0$  folgen würde. Die Fehlersabschätzung für alternierende Reihen liefert jedoch

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n-1}}{n} - s \right| < \frac{1}{m+1},$$

für  $m = 1$  also  $1/2 < s < 3/2$ , im Widerspruch zu  $s = 0$ .

Aus diesem Beispiel können wir erkennen, dass eine konvergente Reihe nicht beliebig umgeordnet werden kann.

**THEOREM 7.9** (*Umordnungssatz*)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  im normierten Raum  $(E, \|\cdot\|)$  absolut konvergent. Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe absolut gegen den gleichen Grenzwert.

**Beweis.** Setze  $b_i := a_{\varphi(i)}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_0$  und

$$s_n := \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{und} \quad s_n^* = \sum_{i=0}^n b_i.$$

(i) Die Umordnung ist absolut konvergent.

Die Partialsummenfolge

$$\left( \sum_{i=0}^n \|b_i\| \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ist monoton wachsend, es genügt zu zeigen, dass sie beschränkt ist. Sei  $m(n)$  die größte ganze Zahl aus der Menge  $\{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$ . Dann gilt wegen der absoluten Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$

$$\sum_{i=0}^n \|b_i\| = \sum_{i=0}^n \|a_{\varphi(i)}\| \leq \sum_{j=0}^{m(n)} \|a_j\| \leq M.$$

(ii) Konvergenz gegen  $s$ .

Zu zeigen ist, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon) : \quad \|s_n^* - s\| < \varepsilon.$$

Zwei wichtige Beobachtungen:

- Für hinreichend großes  $n$  approximiert  $s_n$  die Summe  $s$  beliebig genau.
- Für hinreichen großes  $n$  ist der Reihenrest  $\sum_{i=n+1}^{n+p} \|a_i\|$  beliebig klein (Cauchy Kriterium).

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_0 & : \quad \|s_n - s\| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_0, \forall p \geq 0 & : \quad \sum_{i=n+1}^{n+p} \|a_i\| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sei nun  $n_0(\varepsilon)$  die größte ganze Zahl in der Menge  $\{\varphi^{-1}(\{0, 1, \dots, N_0\})\}$ , dann ist

$$\{\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(N_0)\} \subset \{0, 1, \dots, n_0(\varepsilon)\}, \quad (2)$$

insbesondere  $n_0(\varepsilon) \geq N_0(\varepsilon)$ . Für  $n > n_0(\varepsilon)$  betrachten wir

$$\|s_n^* - s\| = \left\| \sum_{i=0}^n b_i - s \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n a_{\varphi(i)} - s \right\|.$$

Die Summe  $\sum_{i=0}^n a_{\varphi(i)}$  enthält wegen (2) alle Summanden  $a_j$  mit  $j = 0, 1, \dots, N_0$ , gegebenenfalls auch weitere mit  $a_j, j > N_0$ . Damit haben wir

$$\begin{aligned} \|s_n^* - s\| &= \left\| \sum_{j=0}^{N_0} a_j - s + \sum_{i=0, \varphi(i) > N_0}^n a_{\varphi(i)} \right\| \\ &\leq \|s_{N_0} - s\| + \sum_{i=0, \varphi(i) > N_0}^n \|a_{\varphi(i)}\| \\ &\leq \|s_{N_0} - s\| + \sum_{j=N_0+1}^{N_0+p} \|a_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

### 7.6.3 Multiplikation von Reihen

Für endliche Summen gilt

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i\right) \left(\sum_{j=0}^m b_j\right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m a_i b_j\right).$$

Wir untersuchen, ob eine analoge Relation für Reihen gilt.

In einer 'vernünftigen' Produktreihe der Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sollte jeder Ausdruck in dem folgenden Schema genau einmal vorkommen

$$\begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

wobei die Reihenfolge der Aufsummierung keine Rolle spielen sollte. Einige Varianten der Aufsummierung sind:

1. Bilde für jede Zeile  $i \in \mathbb{N}_0$  die Zeilensumme  $\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j$ , und summiere diese von oben nach unten

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j\right).$$

2. Bilde für jede Spalte  $j \in \mathbb{N}_0$  die Spaltensumme  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_j$  und summiere diese von links nach rechts

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_j\right).$$

3. Bilde für jede Diagonale  $n \in \mathbb{N}_0$  die Diagonalsumme  $\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}$  und summiere über alle Diagonalen von links oben nach rechts unten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}\right).$$

Wir setzen  $x_{mn} := a_m b_n$  und sind an hinreichenden Kriterien interessiert, die ein 'Aufsummieren' der Doppelreihe  $\sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}$  sichern. Jede Anordnung der  $x_{mn}$  kann durch eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ , mit  $(m, n) = \varphi(k)$ , eineindeutig charakterisiert werden.

**DEFINITION 7.9** Die Doppelreihe  $\sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}$  mit  $x_{mn} \in E$  heißt summierbar, wenn

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{i,j=0}^n \|x_{ij}\| < \infty.$$



**THEOREM 7.10** (*Doppelreihensatz*)

Es sei  $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$  eine summierbare Doppelreihe im Banachraum  $E$ . Dann gelten folgende Aussagen:

1. Jede Anordnung  $\sum_{k=0}^{\infty} x_{\varphi(k)}$  der Doppelreihe  $\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$  konvergiert absolut gegen einen von der Abzählung  $\varphi$  unabhängigen Wert  $s \in E$ .
2. Die Reihe der Zeilensummen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} \right)$$

und die Reihe der Spaltensummen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} \right)$$

konvergieren absolut, und es gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} x_{mn} \right) = s.$$

**Beweis.** Siehe z.B. Amann/Escher, Analysis I, Birkhäuser Verlag 1998, S.215

**THEOREM 7.11** (*Cauchyprodukte von Reihen*)

Die Reihen  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  seien absolut konvergent in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann konvergiert das Cauchyprodukt  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right)$  absolut und es gilt

$$\left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right).$$

**Beweis.** Die Doppelreihe  $\sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}$  mit  $x_{mn} = a_m b_n$  ist wegen

$$\sum_{i,j=0}^n |x_{ij}| \leq \left( \sum_{i=0}^n |a_i| \right) \left( \sum_{j=0}^n |b_j| \right) \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

summierbar. Die Aussage folgt daher aus dem Doppelreihensatz.

## 7.7 Potenzreihen

**DEFINITION 7.10** Seien  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen und  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ . Unter einer Potenzreihe (nach Potenzen von  $z - z_0$ ) versteht man die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ .

**Beachte:** Das erste Glied der Partialsummenfolge ist  $a_0(z - z_0)^0 = a_0$ , auch für  $z = z_0!$

Für jedes  $z \in \mathbb{C}$ , für das die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  konvergiert, bezeichnen wir die Summe mit  $f(z)$ . Dann ist  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf dem Konvergenzbe-  
reich der Potenzreihe definierte Abbildung. Die folgenden Beispiele zeigen, dass  $\{z_0\} \subset D \subset \mathbb{C}$ . Insbesondere können die beiden Grenzfälle  $D = \{z_0\}$  und  $D = \mathbb{C}$  auftreten.

**BEISPIEL 7.8** Jede Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  konvergiert für  $z = z_0$  gegen  $a_0$ , da für die zugeordnete Partialsummenfolge  $(s_n)$ ,  $s_n = a_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.

**BEISPIEL 7.9** Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z - z_0)^n$  konvergiert nur für  $z = z_0$ , das notwendige Konvergenzkriterium ist wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!(z - z_0)^n = +\infty$  für  $z \neq z_0$  nicht erfüllt.

**BEISPIEL 7.10** Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}$  konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut. Nach dem Quotientenkriterium gilt nämlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z - z_0|^{n+1} n!}{(n+1)! |z - z_0|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z - z_0|}{n+1} = 0.$$

**LEMMA 7.1** Konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  für  $z = z_1$ , so konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$ , mit  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , absolut. Divergiert die Reihe für ein  $z = z_2$ , so divergiert die Reihe für jedes  $z \in \mathbb{C}$ , für das  $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ .

**Beweis.** Aus der Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$  folgt (notwendiges Konvergenzkriterium), dass  $(a_n(z_1 - z_0)^n)$  eine konvergente Nullfolge, also beschränkt ist. Sei nun  $z \in \mathbb{C}$  derart, dass  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  und  $q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}$ . Dann ist wegen

$$|a_n| |z - z_0|^n \leq |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M q^n, \quad q \in (0, 1),$$

die geometrische Reihe eine konvergente Majorante.

Sei nun  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ . Angenommen die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  sei konvergent, dann ist nach der ersten Aussage  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_2 - z_0)^n$  absolut konvergent im Widerspruch zur Voraussetzung.

**THEOREM 7.12** Zu jeder Potenzreihe gibt es genau ein  $\rho \in [0, \infty]$  mit folgenden Eigenschaften

1. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  konvergiert für  $|z - z_0| < \rho$  und divergiert für  $|z - z_0| > \rho$ .
2. Es gilt die Hadamardsche Formel

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Die Zahl  $\rho$  heißt Konvergenzradius und  $B(z_0, \rho) \subset \mathbb{C}$  Konvergenzkreis der Potenzreihe.

**Beweis.** Die Existenz eines  $\rho \in [0, \infty]$  mit dem angegebenen Eigenschaften folgt aus obigem Lemma. Die Hadamardsche Formel ergibt sich aus dem Wurzelkriterium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \frac{|z - z_0|}{\rho_0}, \quad \frac{1}{\rho_0} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

wobei für  $|z - z_0| < \rho_0$  die Potenzreihe konvergiert und für  $|z - z_0| > \rho_0$  die Potenzreihe divergiert.

Auf dem Rand des Konvergenzkreises können keine allgemeinen Aussagen gemacht werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

**BEISPIEL 7.11** Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2},$$

haben alle den Konvergenzradius  $\rho = 1$ . Die erste konvergiert für kein  $z$ , mit  $|z| = 1$  (notwendiges Konvergenzkriterium nicht erfüllt). Die zweite Potenzreihe konvergiert für  $z = -1$  (alternierende harmonische Reihe) und divergiert für  $z = 1$  (harmonische Reihe). Die dritte Reihe konvergiert in jedem Punkt  $z$  mit  $|z| = 1$  absolut (konvergente Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ ).

## 7.8 Rechenregeln für Potenzreihen

### 7.8.1 Linearkombination von Potenzreihen

Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\rho_a$  und  $\rho_b$ . Dann gilt für  $|z - z_0| < \min(\rho_a, \rho_b)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

und die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n$  hat einen Konvergenzradius  $\rho_{\alpha+\beta} \geq \min(\rho_a, \rho_b)$ .

### 7.8.2 Multiplikation von Potenzreihen

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$  zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\rho_a$  und  $\rho_b$ . Dann gilt für  $|z - z_0| < \min(\rho_a, \rho_b)$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

wobei

$$c_n := \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}.$$

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  hat einen Konvergenzradius  $\rho_{a \cdot b} \geq \min(\rho_a, \rho_b)$ .

### 7.8.3 Umrechnen einer Potenzreihe

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\rho$ . Ziel ist die Änderung der Entwicklungsstelle von  $z = z_0$  auf  $z = z_1$ , wobei wir im folgenden  $z$ -Werte mit  $|z - z_1| < \tau := \rho - |z_1 - z_0|$  betrachten, die sämtlich im Konvergenzkreis der Reihe liegen.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(z - z_1) + (z_1 - z_0)]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (z - z_1)^m (z_1 - z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_n \binom{n}{m} (z - z_1)^m (z_1 - z_0)^{n-m} \end{aligned}$$

Setze

$$\alpha_{mn} := \begin{cases} a_n \binom{n}{m} (z - z_1)^m (z_1 - z_0)^{n-m} & 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}.$$

Wir prüfen zunächst die Summierbarkeit der Doppelreihe.

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N |\alpha_{mn}| = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n |\alpha_{mn}|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=0}^N |a_n| \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |z - z_1|^m |z_1 - z_0|^{n-m} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n,
\end{aligned}$$

da  $|z - z_1| + |z_1 - z_0| < \rho$ . Wir können also die Summationsreihenfolge vertauschen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (z - z_1)^m (z_1 - z_0)^{n-m} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_1)^m,
\end{aligned}$$

wobei

$$b_m := \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} (z_1 - z_0)^{n-m}.$$

#### 7.8.4 Identitätssatz für Potenzreihen

Das folgende Lemma beinhaltet die Stetigkeit der durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf  $|z - z_0| < \rho$  definierten Abbildung im Punkt  $z = z_0$ .

**LEMMA 7.2** *Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  habe den positiven Konvergenzradius  $\rho$ . Seien  $(z^m) \subset \mathbb{C}$  eine Folge komplexer Zahlen mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} z^m = z_0$  und  $|z^m - z_0| < \rho$ . Dann gilt*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^m - z_0)^n = a_0.$$

**Beweis.** Sei  $(z^m)$  eine Folge mit den angegebenen Eigenschaften, dann gilt

$$\forall \delta > 0 \quad \exists m_0(\delta) \quad \forall m > m_0(\delta) : \quad |z^m - z_0| < \delta.$$

Wir wählen  $\delta \leq \rho/2$  und haben für alle  $m > m_0(\delta)$   $|z^m - z_0| < \rho/2$ . Sei

$$M := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^m - z_0)^n - a_0 \right| &\leq |z^m - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z^m - z_0|^{n-1} \\ &\leq |z^m - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-1} \\ &\leq M |z^m - z_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

für  $|z^m - z_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\rho}{2}\right) =: \delta$ , d.h., für alle

$$m > m^*(\varepsilon) := m_0(\delta) = m_0\left(\min\left(\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\rho}{2}\right)\right).$$

**THEOREM 7.13** (*Koeffizientenvergleich*)

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $\rho_a$  und  $\rho_b$ . Gilt für ein  $\sigma$ ,  $0 < \sigma < \min(\rho_a, \rho_b)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, \sigma),$$

so folgt

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

**Beweis.** Der Beweis erfolgt induktiv bezüglich  $N$ . Wir wählen eine Folge komplexer Zahlen  $(z^m) \subset B(z_0, \sigma)$  mit  $z^m \rightarrow z_0$ . Dann folgt

$$a_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^m - z_0)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z^m - z_0)^n = b_0.$$

Die Behauptung gilt damit für  $N = 0$ . Seien nun für  $n = 0, \dots, N$   $a_n = b_n$  gezeigt. Dann haben wir für alle  $z \in B(z_0, \sigma) \setminus \{z_0\}$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

oder äquivalent

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+1+n} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{N+1+n} (z - z_0)^n.$$

Hieraus folgt wie oben  $a_{N+1} = b_{N+1}$ .

## 7.9 Elementare Funktionen

Nach vorigem Abschnitt stellt jede Potenzreihe innerhalb des Konvergenzkreises eine stetige Funktion dar.

### BEISPIEL 7.12

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \rho = +\infty.$$

Die Exponentialfunktion genügt

$$\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2),$$

denn durch Multiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n \frac{z_1^m z_2^{n-m}}{m!(n-m)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z_1^m z_2^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Für alle  $\varphi \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(i\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Zunächst haben wir

$$\exp(i\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!},$$

woraus unter Berücksichtigung von

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & n = 2k \\ (-1)^k i & n = 2k + 1 \end{cases}$$

und  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1}$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

folgt.

**BEISPIEL 7.13** Für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  setzen wir

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Somit gilt die Eulersche Beziehung

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Für alle komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  gilt die Doppelwinkelformel

$$\sin z \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z.$$

Multiplikation der beiden zugeordneten Reihen ergibt

$$\begin{aligned} \sin z \cos z &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m z^{2m+1} (-1)^{n-m} z^{2n-2m}}{(2m+1)!(2n-2m)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^n \binom{2n+1}{2m}. \end{aligned}$$

**Nebenbetrachtung.** Aus dem binomischen Satz folgt

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= (1+1)^{2n+1} - (1-1)^{2n+1} \\ &= \sum_{m=0}^{2n+1} \left[ \binom{2n+1}{m} + (-1)^m \binom{2n+1}{m} \right] = \sum_{m=0}^n 2 \binom{2n+1}{2m}. \end{aligned}$$

Setzen wir das Ergebnis in obige Rechnung ein, so erhalten wir

$$\sin z \cos z = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2z)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{1}{2} \sin 2z.$$

**BEISPIEL 7.14** Für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  setzen wir

$$\begin{aligned} \sinh z &:= \frac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh z &:= \frac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Die folgenden Beispiele zeigen, wie Reihenentwicklungen zur Grenzwertberechnung verwendet werden können. Hierbei wird neben den Rechenregeln für Reihen die Stetigkeit einer Reihe  $\sum_{m=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  an der Entwicklungsstelle  $z_0$  benutzt.



**BEISPIEL 7.15**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Aus der Reihendarstellung von  $\cos$  erhalten wir

$$1 - \cos x = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{1}{2}.$$

**BEISPIEL 7.16**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x) - 1}{\sinh 3x} = \frac{2}{3}.$$

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ergibt

$$\exp(2x) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n+1)!},$$

und für die Sinushyperbolicusfunktion gilt

$$\sinh(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Insgesamt folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x) - 1}{\sinh(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n+1)!}}{3x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{(2n+1)!}} = \frac{2}{3}.$$

## 8 Einige Funktionenräume

### 8.1 Raum der beschränkten Abbildungen

Sei  $\mathcal{B}(E)$  die Gesamtheit aller auf  $E$  beschränkten Abbildungen  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Man überzeugt sich leicht, dass durch

$$(\alpha u + \beta v)(x) := \alpha u(x) + \beta v(x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in \mathcal{B}(E)$$

$\mathcal{B}(E)$  zu einem linearen Vektorraum wird. Eine Norm, die die in Beispiel 3.4 gegebene Metrik induziert, wird durch

$$\|u\| := \sup_{t \in E} |u(t)|$$

erklärt, insbesondere sind die Normeigenschaften (N1)-(N3) erfüllt.

**THEOREM 8.1** *Der Raum  $\mathcal{B}(E)$  ist ein Banachraum.*

**Beweis:** Sei  $(u_n) \subset \mathcal{B}(E)$  eine Cauchyfolge, d.h.,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) : \quad \|u_m - u_n\| = \sup_{t \in E} |u_m(t) - u_n(t)| < \varepsilon.$$

Somit gilt

$$\forall t \in E, \quad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \quad |u_m(t) - u_n(t)| < \varepsilon, \quad (3)$$

also ist für jedes  $t \in E$  die Zahlenfolge  $(u_n(t))$  Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist, existiert für jedes  $t \in E$  ein  $u(t) \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t)$ . Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  in (3) ergibt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \quad \forall t \in E : \quad |u_n(t) - u(t)| \leq \varepsilon.$$

Hieraus folgen

(i) wegen der Beschränktheit der Cauchyfolge  $(u_n)$  in  $\mathcal{B}(E)$  aus

$$|u(t)| \leq |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t)| \leq \varepsilon + \|u_n\|$$

die Beschränktheit von  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,

(ii) und

$$\sup_{t \in E} |u_n(t) - u(t)| = \|u_n - u\| \leq \varepsilon < 2\varepsilon,$$

also die Konvergenz der Folge  $(u_n)$  gegen  $u$  in  $\mathcal{B}(E)$ .

Für Folgen beschränkter Funktionen führt man verschiedene Konvergenzbegriffe ein.

**DEFINITION 8.1** Die Folge  $(u_n(t))$  von Funktionen  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $E$  punktweise konvergent, wenn

$$\forall t \in E, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon, t) \quad \forall n > n_0(\varepsilon, t) : \quad |u_n(t) - u(t)| < \varepsilon.$$

**BEISPIEL 8.1** Seien  $E = [0, 1]$  und  $u_n(t) = t^n$ . Dann gilt auf  $[0, 1]$  punktweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1), \\ 1 & t = 1, \end{cases}$$

denn für alle  $t \in [0, 1)$  haben wir

$$|t^n - 0| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln t} =: n_0(\varepsilon, t).$$

Im Fall  $t = 1$  bekommen wir

$$|1^n - 1| = 0 < \varepsilon \quad \text{für alle } n.$$

Im obigen Beispiel gilt  $\sup_{t \in E} n_0(\varepsilon, t) = +\infty$ , d.h., es gibt keine Indexschranke  $n_0$ , die gleichmäßig für alle  $t \in E$  die Beziehung  $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon$  garantiert.

**DEFINITION 8.2** Die Folge  $(u_n(t))$  von Funktionen  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $E$  gleichmäßig konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n > n_0(\varepsilon), \forall t \in E : \quad |u_n(t) - u(t)| < \varepsilon.$$

**BEISPIEL 8.2** Seien  $E = [0, 1/2]$  und  $u_n(t) = t^n$ . Dann gilt auf  $[0, 1/2]$  gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 0,$$

denn für alle  $t \in [0, 1/2]$  haben wir

$$|t^n - 0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} =: n_0(\varepsilon).$$

**FOLGERUNG 8.1** Die Folge  $(u_n(t))$  konvergiert genau dann gleichmäßig gegen  $u(t)$  auf  $E$ , wenn  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beweis.** Die Aussage folgt sofort aus den Implikationen

$$\begin{aligned} \forall t \in E : \quad |u_n(t) - u(t)| < \varepsilon &\Rightarrow \|u_n - u\| \leq \varepsilon, \\ \forall t \in E : \quad |u_n(t) - u(t)| < \varepsilon &\Leftarrow \|u_n - u\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Beachte:** Summe und Differenz zweier gleichmäßig konvergenter Folgen sind wieder gleichmäßig konvergent. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt zweier gleichmäßig konvergenter Funktionsfolgen nicht notwendig gleichmäßig konvergiert.

**BEISPIEL 8.3** Betrachte auf  $\mathbb{R}$  die Funktionsfolgen  $(f_n)_{n \geq 1}$  und  $(g_n)_{n \geq 1}$  mit

$$f_n(x) = x \text{ und } g_n(x) = \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergieren  $(f_n)_{n \geq 1}$  auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f$  und  $(g_n)_{n \geq 1}$  gleichmäßig gegen  $g$ , wobei  $f(x) = x$  und  $g(x) = 0$  gelten.

Tatsächlich haben wir nämlich für beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : \quad |f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$$

und

$$\forall n > n_0(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } \forall x \in \mathbb{R} : \quad |g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Das Produkt  $f_n(x) \cdot g_n(x)$  konvergiert auf  $\mathbb{R}$  zwar punktweise gegen Null, es gilt nämlich  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n_0(\varepsilon, x) = \frac{x}{\varepsilon} \quad \forall n > n_0(\varepsilon, x)$

$$|f_n(x) \cdot g_n(x) - 0| = \left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon,$$

jedoch läßt sich keine von  $x \in \mathbb{R}$  unabhängige Indexschranke  $n_0(\varepsilon)$  angeben, so dass

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad |f_n(x) \cdot g_n(x) - 0| = \left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon$$

gilt (wähle einfach  $x = 2\varepsilon n$ ).

## 8.2 Raum der stetigen Abbildungen

In diesem Abschnitt sei  $K$  eine kompakte Menge in einem metrischen Raum  $(E, d)$  und  $\mathcal{C}(K)$  die Menge aller auf  $K$  stetigen Abbildungen  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Weierstraß ist jede auf  $K$  stetige Abbildung beschränkt. Somit ist  $\mathcal{C}(K)$  eine Teilmenge von  $\mathcal{B}(K)$ . Da die Linearkombination stetiger Abbildungen stetig ist, ist  $\mathcal{C}(K)$  sogar ein linearer Unterraum des Vektorraums der beschränkten Abbildungen  $\mathcal{B}(K)$  und mit der auf  $\mathcal{B}(K)$  durch

$$\|u\| := \sup_{x \in K} |u(x)|$$

definierten Norm ein normierter Raum. Die Frage ist, ob  $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|)$  ein Banachraum ist.

**THEOREM 8.2** Der Raum  $\mathcal{C}(K)$  ist ein Banachraum.

**Beweis.** Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|)$ . Dann ist  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch Cauchyfolge in  $(\mathcal{B}(K), \|\cdot\|)$ , die wegen der Vollständigkeit von  $(\mathcal{B}(K), \|\cdot\|)$  in  $(\mathcal{B}(K), \|\cdot\|)$  gegen eine Abbildung  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Um zu zeigen, dass  $u$

in einem beliebigen Punkt  $x_0$  stetig ist, splitten wir die Differenz  $|u(x) - u(x_0)|$  mit Hilfe der Dreiecksungleichung in drei Anteile

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &\leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u(x_0)| \\ &\leq 2 \|u - u_n\| + |u_n(x) - u_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Aufgrund der Konvergenz von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $u$  in  $\mathcal{B}(K)$  finden wir zu jeder Toleranzschranke  $\varepsilon > 0$  einen Index  $m(\varepsilon)$ , so dass

$$\|u - u_m\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jede der Abbildungen  $u_n : K \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , ist auf  $K$  stetig, d.h.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, x_0 \in K \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0, n) > 0 \quad \text{mit} \\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $\delta^*(\varepsilon, x_0) := \delta(\varepsilon, x_0, m(\varepsilon))$  so folgt

$$\forall \varepsilon > 0, x_0 \in K \quad \exists \delta^*(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \text{mit } d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

**FOLGERUNG 8.2** *Ist  $K$  kompakt und konvergiert die Folge  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  stetiger Funktionen  $u_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $K$  gleichmäßig gegen  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $u$  auf  $K$  stetig.*

Zur Beantwortung der Frage, ob aus der Stetigkeit der Grenzfunktion  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  einer auf  $K$  punktweise konvergenten Folge  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  stetiger Funktionen  $u_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  sich zwingend die gleichmäßige Konvergenz der Folge ergibt, betrachten wir nachfolgendes Beispiel:

**BEISPIEL 8.4** *Wir betrachten die durch*

$$u_n(x) := \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases}$$

auf  $K = [0, 2]$  definierte Folge stetiger Funktionen (vgl. Abb. 12).

Die Folge konvergiert punktweise auf  $[0, 2]$  gegen die stetige Grenzfunktion  $u = 0$ , denn  $u_n(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$  und für gegebenes  $x > 0$  gilt für  $n \geq 2/x$  stets  $u_n(x) = 0$ . Die Folge konvergiert jedoch nicht gleichmäßig auf  $[0, 2]$ , denn

$$\|u_n - u\| = \sup_{x \in [0, 2]} |u_n(x) - u(x)| = 1.$$

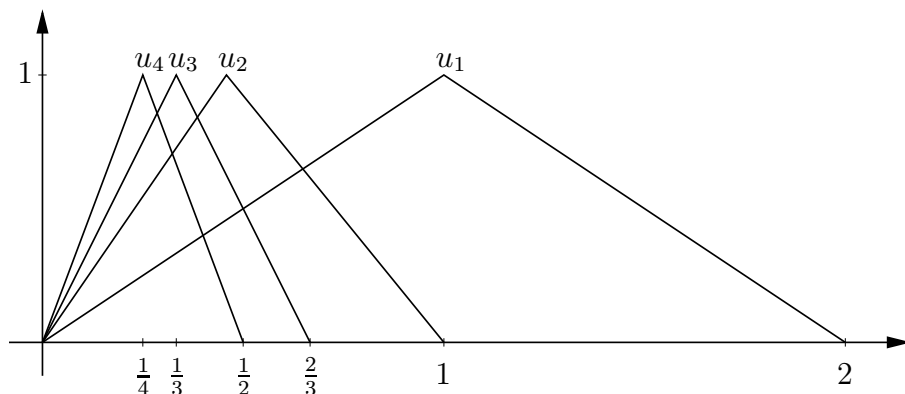


Abbildung 12: Vier Glieder der Folge  $(u_n)$

Unter zusätzlichen Bedingungen kann die obige Frage positiv beantwortet werden.

**THEOREM 8.3** (*Satz von DINI*)

Es sei  $K \subset X$  eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes  $(X, d)$ . Jede monoton wachsende (bzw. fallende) Folge stetiger Funktionen  $u_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $K$  punktweise gegen eine stetige Funktion  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, konvergiert auf  $K$  gleichmäßig gegen  $u$ .

**Beweis:** O.B.d.A. betrachten wir den Fall einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen. Die punktweise Konvergenz gegen  $u$  bedeutet

$$\forall x \in K, \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon, x) \quad \forall n \geq n_0 : \quad 0 \leq u(x) - u_n(x) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Stetigkeit von  $u$ ,  $u_{n_0}$  im Punkt  $x \in K$  liefern die Existenz einer Umgebung  $K(x, \delta)$  mit  $\delta = \delta(\varepsilon, x) = \delta(\varepsilon, n_0(\varepsilon, x), x) > 0$  derart, dass

$$\forall y \in K(x, \delta) \Rightarrow |u(y) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |u_{n_0}(y) - u_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Somit haben wir

$$\forall \varepsilon, x \in K \quad \exists n_0, K(x, \delta) \text{ mit } \forall n \geq n_0, \forall y \in K(x, \delta) :$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(y) - u_n(y) \leq u(y) - u_{n_0}(y) \\ &\leq |u(y) - u(x)| + |u(x) - u_{n_0}(x)| + |u_{n_0}(x) - u_{n_0}(y)| \\ 0 &\leq u(y) - u_n(y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Das offene System  $\{K(x, \delta)\}_{x \in K}$  überdeckt die Menge  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, reichen endlich viele Mengen zur Überdeckung von  $K$  aus, die wir mit  $K(\varepsilon, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  bezeichnen. Sei nun  $n_0^*(\varepsilon) = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} n_0(\varepsilon, x_i)$ . Dann gilt

$$0 \leq u(y) - u_n(y) < \varepsilon \quad y \in K, n \geq n_0^*.$$

**Beachte:** Der Satz von Dini gibt vier hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine auf einer Menge  $A \subset X$  punktweise gegen eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  konvergierende Funktionenfolge  $(u_n)_{n \geq 1}$ , mit  $u_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ , auf  $A$  gleichmäßig konvergiert. Diese vier Bedingungen sind

1.  $u_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\forall n \in \mathbb{N}$
2.  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig
3.  $\forall x \in A \quad \exists n_0(x) \in \mathbb{N} : (u_n(x))_{n \geq n_0(x)}$  monoton wachsend (bzw. fallend)
4.  $A$  kompakt.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass keine der vier Bedingungen ersatzlos gestrichen werden kann und die Aussage des Satzes dennoch gilt.

**BEISPIEL 8.5** Betrachte die auf  $[0, 1]$  definierte Folge  $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \quad \text{oder } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

die auf  $A = [0, 1]$  punktweise gegen  $u$  mit  $u(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , konvergiert. Man überprüft, dass 2., 3. und 4. gelten, aber

$$\|u_n - u\| = \sup_{x \in A} |u_n(x) - u(x)| = 1$$

gilt.

**BEISPIEL 8.6** Betrachte die Folge  $(u_n)_{n \geq 1}$  mit

$$u_n(x) = x^n \quad \text{für } x \in [0, 1].$$

Die Folge konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Diese Folge genügt den Bedingungen 1., 3. und 4., konvergiert jedoch auf  $A = [0, 1]$  nicht gleichmäßig gegen  $u$  (vgl. Bsp. 8.1).

**BEISPIEL 8.7** Betrachte die auf  $A = [0, 2]$  definierte Folge  $(u_n)_{n \geq 1}$  aus Bsp. 8.3. Diese Folge genügt den Bedingungen 1., 2. und 4. konvergiert jedoch auf  $A$  nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion.

**BEISPIEL 8.8** Betrachte die Folge  $(u_n)_{n \geq 1}$  mit  $u_n(x) = x^n$  auf  $A = [0, 1]$ . Die Folge konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $u(x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1)$  gilt. Hier gelten die Bedingungen 1., 2. und 3., jedoch ist  $A = [0, 1]$  nicht kompakt.

### 8.3 Funktionenreihen

In Verallgemeinerung von Potenzreihen mit dem allgemeinen Glied  $u_n(x) := a_n(x - x_0)^n$  betrachten wir nun Funktionenreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Für jedes  $x \in E$  ist  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  eine Reihe reeller Zahlen. In diesem Sinne verwendet man folgende Konvergenzbegriffe:

**DEFINITION 8.3** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  heißt auf  $E$

1. *punktweise konvergent*, falls die Folge der Partialsummen  $(\sum_{m=0}^n u_m(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$  auf  $E$  punktweise konvergiert,
2. *gleichmäßig konvergent*, falls die Folge der Partialsummen  $(\sum_{m=0}^n u_m(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$  auf  $E$  gleichmäßig konvergiert,
3. *absolut konvergent*, falls für jedes  $x \in E$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$  konvergiert.

Sind die Glieder der Reihe  $u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $E$  beschränkt, so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  eine Reihe im Banachraum  $\mathcal{B}(E)$ . Dabei ergeben sich folgende Konvergenzbegriffe:

**DEFINITION 8.4** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  heißt

1. *in  $\mathcal{B}(E)$  konvergent*, falls die Folge der Partialsummen  $(\sum_{m=0}^n u_m)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $\mathcal{B}(E)$  konvergiert,
2. *in  $\mathcal{B}(E)$  absolut konvergent*, falls die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

Hinsichtlich der Zusammenhänge der verschiedenen Konvergenzbegriffe bemerken wir:

- In jedem normierten Raum folgt aus der absoluten Konvergenz die Konvergenz der Reihe.
- Wegen  $|u_n(x)| \leq \sup_{x \in E} |u_n(x)| = \|u_n\|$  für alle  $x \in E$  folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  in  $\mathcal{B}(E)$  die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  auf  $E$  in  $\mathbb{R}$ .
- Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  konvergiert genau dann in  $\mathcal{B}(E)$ , wenn in  $\mathbb{R}$  die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  auf  $E$  gleichmäßig konvergiert.
- Aus der auf  $E$  gleichmäßigen Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  folgt die auf  $E$  punktweise Konvergenz der Reihe.



Somit ergibt sich die in Abb. 13 gegebene Übersicht.

Ein hinreichendes Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz ist

**THEOREM 8.4** (*Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz*)

Für alle Indizes  $n > N_0$  und für alle  $x \in E$  gelte  $|u_n(x)| \leq b_n$ . Ferner sei die Zahlenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  konvergent. Dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  auf  $E$  absolut und gleichmäßig.

**Beweis:** Für  $n > N_0$  ist  $b_n$  eine obere Schranke für  $|u_n(x)|$ , also ist  $\|u_n\| \leq b_n$ . Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  in  $\mathcal{B}(E)$  absolut.

**BEISPIEL 8.9** *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent, denn wegen

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

## 8.4 Potenzreihen

Lemma 7.2 beinhaltet die Stetigkeit einer Potenzreihe an der Entwicklungsstelle, mit der in Abschnitt 7.8.3 gezeigten Möglichkeit der Umrechnung einer Potenzreihe kann die Stetigkeit in jedem Punkt des Konvergenzkreises  $B(z_0, \rho) \subset \mathbb{C}$  gezeigt werden. Wir zeigen, dass eine Potenzreihe auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert und bereiten damit einen neuen Beweis für die Stetigkeit einer Potenzreihe in jedem Punkt ihres Konvergenzkreises vor.

**THEOREM 8.5** *Eine Potenzreihe ist auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzkreises  $B(z_0, \rho)$  gleichmäßig konvergent.*

**Beweis.** Sei  $K \subset B(z_0, \rho)$  kompakt und  $\rho < \infty$ .

- (i) Wir zeigen zunächst, dass der Abstand einer kompakten Menge  $K$  von einer abgeschlossenen Menge  $A$ , die keinen Punkt gemeinsam haben, positiv ist. (Dieudonné, Kapitel 3.17, Aufgabe 2). Die Abbildung  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$f(x) = \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

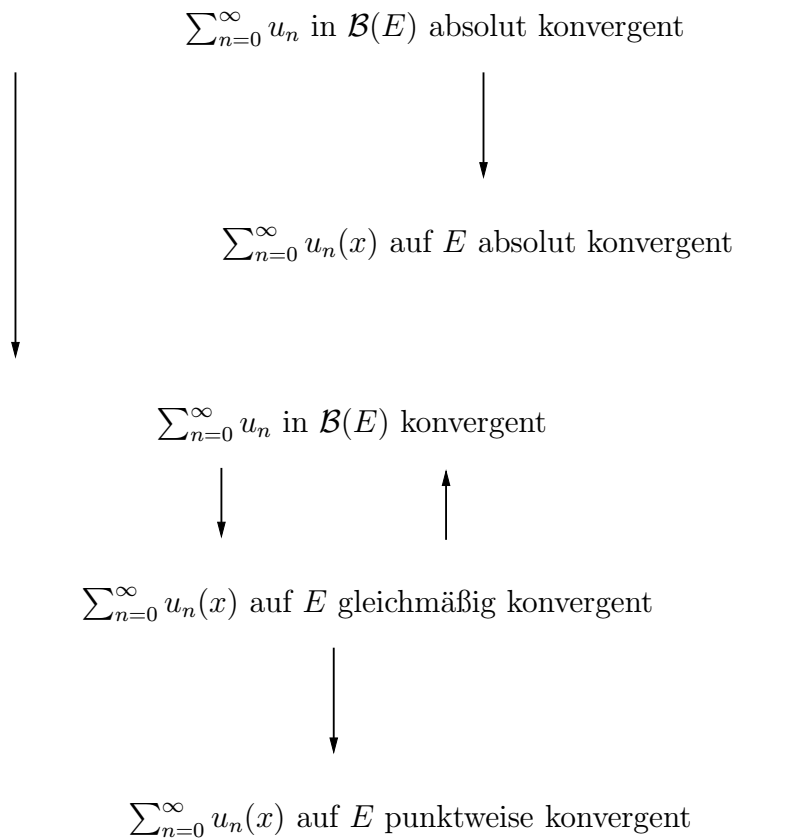


Abbildung 13: Übersicht über die Konvergenzbegriffe

ist auf der kompakten Menge  $K$  stetig, insbesondere gilt

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y.$$

In der Tat haben wir fur alle  $z \in A$

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

woraus durch Übergang zum Infimum

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

folgt. Vertauschung von  $x$  und  $y$  ergibt schließlich

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Nach dem Satz von Weierstraß gibt es also ein  $x_0 \in K$  mit  $f(x_0) = d(x_0, A) = \text{dist}(K, A)$ . Angenommen  $d(x_0, A) = 0$ . Dann gibt es eine Folge

$(a_k)$  in  $A$  mit  $d(x_0, a_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , d.h., die Folge  $(a_k)$  konvergiert gegen  $x_0$ . Da  $A$  abgeschlossen war, ist  $x_0 \in A$ , im Widerspruch zu  $K \cap A = \emptyset$ .

(ii) Der Abstand von  $K$  zu  $S(z_0, \rho)$  sei nun  $\tau$ . Dann ist  $K \subset \bar{B}(z_0, \rho - \tau)$  und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(\rho - \tau)^n$$

eine konvergente Majorante zur Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ,  $z \in K$ .

(iii) Im Fall  $\rho = \infty$  finden wir eine konvergente Majorante, da die kompakte Menge  $K$  (abgeschlossen und) beschränkt ist.

**FOLGERUNG 8.3** *Eine Potenzreihe ist in jedem Punkt des Konvergenzkreises  $B(z_0, \rho)$  stetig.*

**Beweis.** Sei  $z_1 \in B(z_0, \rho)$  und  $\tau := \rho - |z_1 - z_0| > 0$ . Da die Potenzreihe auf der kompakten Menge  $\bar{B}(z_1, \tau/2) \subset B(z_0, \rho)$  gleichmäßig konvergiert und die Partialsummen auf  $\bar{B}(z_1, \tau/2)$  stetig sind, ist die Summe der Reihe auf  $\bar{B}(z_1, \tau/2)$  stetig. Nun war  $z_1 \in B(z_0, \rho)$  beliebig, also ist die Potenzreihe in jedem Punkt des Konvergenzkreises stetig.

**FOLGERUNG 8.4** *Die Abbildungen  $\exp z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cosh z$  sind auf  $\mathbb{C}$  stetig.*

## 9 Differentialrechnung in einer Variablen

Zu Beginn der historischen Entwicklung der Differentialrechnung stehen eine geometrische und eine physikalische Fragestellung: das Tangentenproblem und das Problem der Momentangeschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Massenpunktes. Im ersten Fall ist eine Gerade gesucht, die durch einen gegebenen Punkt eines glatten Kurvenstücks verläuft und dieses Kurvenstück *möglichst gut approximiert*; im zweiten Fall sucht man eine gleichförmige Bewegung, die zu einem gegebenen Zeitpunkt die ungleichförmige Bewegung *möglichst gut approximiert*. **Grundidee.** Approximation beliebiger Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch lineare Funktionen.

### 9.1 Begriff der Differenzierbarkeit

**DEFINITION 9.1** Seien  $D \subset \mathbb{R}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $f$  heißt im Punkt  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$  differenzierbar, wenn es eine Zahl  $m$  und eine in  $x_0$  stetige Abbildung  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \quad x \in D$$

und  $r(x_0) = 0$ .

**BEMERKUNG 9.1** Wie lassen sich im Falle ihrer Existenz  $m$  und  $r$  ermitteln? Für  $x \neq x_0$  gilt

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - r(x), \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

und definiert man  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m & x \neq x_0, \\ 0 & x = x_0, \end{cases}$$

so genügen  $m$  und  $r$  den Bedingungen der obigen Definition. Der Vorteil der quotientenfreien Formulierung ist neben einfacheren Beweisen die Möglichkeit der Übertragung auf den mehrdimensionalen Fall.

**BEMERKUNG 9.2** Ist  $f$  in  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$  differenzierbar, so sind  $m$  und  $r$  eindeutig bestimmt. Die Zahl  $m$  heißt Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ , in Zeichen

$$m = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

**BEISPIEL 9.1** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ .

Wir haben

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-i-1} \\ &= m(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \end{aligned}$$

mit

$$m = nx_0^{n-1}, \quad r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-i-1} - nx_0^{n-1}.$$

**BEISPIEL 9.2** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist in jedem Punkt  $x_0 \neq 0$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x_0) = -\frac{n}{x_0^{n+1}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^{2n}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= -\frac{1}{x_0^{2n}} \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = -\frac{n}{x_0^{n+1}} \end{aligned}$$

**BEISPIEL 9.3** Die Funktion  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $f(x) = \sqrt{x}$  ist in jedem Punkt  $x_0 > 0$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Die Aussage folgt unmittelbar aus

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

durch Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$ .

Die folgenden Beispiele zeigen, dass stetige Funktionen nicht notwendig differenzierbar sind. Insbesondere gibt es auch auf  $\mathbb{R}$  stetige Funktionen, die in keinem Punkt von  $\mathbb{R}$  differenzierbar sind (vgl. Barner/Flohr, Analysis I, Abschnitt 8.1).

**BEISPIEL 9.4** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|$  ist im Punkt  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

Die Aussage ergibt sich aus

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x| - 0}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1.$$

**BEISPIEL 9.5** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x^k \cos(\pi/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist für  $k = 1$  im Punkt  $x = 0$  nicht differenzierbar. Für  $k \geq 2$  ist  $f$  im Punkt  $x = 0$  differenzierbar.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{k-1} \cos(\pi/x)$$

existiert für  $k \geq 2$ , jedoch nicht für  $k = 1$ .

**THEOREM 9.1** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in D$  differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

**Beweis.** Da  $f$  in  $x_0 \in D$  differenzierbar ist, haben wir für alle  $x \in D$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

mit  $r(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Also gibt es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta(1)$  mit  $|r(x)| < 1$  für  $|x - x_0| < \delta(1)$ . Somit gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein

$$\delta^*(\varepsilon) := \min \left( \frac{\varepsilon}{m+1}, \delta(1) \right),$$

so dass für  $|x - x_0| < \delta^*(\varepsilon)$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (m+1)|x - x_0| < \varepsilon.$$

Aus der Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  folgt nicht die Stetigkeit von  $f$  in Umgebung von  $x_0$ , wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 9.6** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}, \\ x + x^2 & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar, aber an keiner anderen Stelle  $x \neq 0$ .

Für den Differenzenquotienten an der Stelle  $x = 0$  gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 + x & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Setze  $m = 1$  und

$$r(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, \\ x & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

dann haben wir für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0) + m(x - 0) + r(x)(x - 0)$$

und  $r$  ist in  $x = 0$  stetig mit  $r(0) = 0$ . Da  $f$  in allen Punkten  $x \neq 0$  unstetig ist, kann  $f$  in diesen Punkten nicht differenzierbar sein.

Oft ist es nützlich, auch den Begriff der einseitigen Differenzierbarkeit einzuführen.

**DEFINITION 9.2** *Ist die Restriktion von  $f$  auf  $D \cap \{x : x \geq x_0\}$  (bzw. von  $f$  auf  $D \cap \{x : x \leq x_0\}$ ) differenzierbar, so heißt  $f$  in  $x_0$  rechtsseitig differenzierbar (bzw. linksseitig differenzierbar), in Zeichen*

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**BEISPIEL 9.7** *Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|$  ist im Punkt  $x = 0$  einseitig differenzierbar, wobei  $f'_+(0) = 1$  und  $f'_-(0) = -1$ .*

**THEOREM 9.2** *Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar. Dann sind auch  $f + g$ ,  $c \cdot f$ ,  $f \cdot g$  und  $1/f$  (falls  $f(x_0) \neq 0$ ) an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (c \cdot f)'(x_0) &= c \cdot f'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2} \end{aligned}$$

**Beweis.** Setzt man  $f_1(x) := f'(x_0) + r(x)$  für alle  $x \in D$ , so stellt man fest, dass aus der Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0 \in D$  die Existenz einer Funktion  $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$  folgt, die in  $x_0$  stetig ist, mit  $f_1(x_0) = f'(x_0)$ , und für die

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0)$$

gilt. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer derartigen Funktion auch die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$ .

Exemplarisch beweisen wir die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Es gelten die Beziehungen

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0) \quad \text{und} \quad g(x) = g(x_0) + g_1(x)(x - x_0).$$

Damit haben wir

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (f_1(x)g(x_0) + f(x_0)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x - x_0)) \cdot (x - x_0).$$

Die Abbildung

$$x \rightarrow f_1(x)g(x_0) + f(x_0)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x - x_0)$$

ist an der Stelle  $x_0$  stetig, somit ist  $f \cdot g$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= f_1(x_0)g(x_0) + f(x_0)g_1(x_0) + f_1(x_0)g_1(x_0)(x_0 - x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

### FOLGERUNG 9.1 (Quotientenregel)

Seien  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g(x_0) \neq 0$ . Dann ist auch  $f/g$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

### THEOREM 9.3 (Kettenregel)

Es sei die Verkettung  $g \circ f$  möglich,  $f$  sei an der Stelle  $x_0$  und  $g$  an der Stelle  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

**Beweis.** Die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  und die von  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$  beinhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f_1(x)(x - x_0) \\ g(y) &= g(y_0) + g_1(y)(y - y_0), \end{aligned}$$

woraus die Beziehung

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(x_0) + g_1(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + g_1(f(x)) \cdot f_1(x) \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $x \rightarrow g_1(f(x)) \cdot f_1(x)$  ist im Punkt  $x_0$  stetig, daher ist  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g_1(f(x_0)) \cdot f_1(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$



**FOLGERUNG 9.2** (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv, an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und die Umkehrfunktion  $g$  von  $f$  an der Stelle  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar. Aus  $x = g(f(x))$  für alle  $x \in D$  folgt unmittelbar

$$1 = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Die Voraussetzung, dass  $g$  in  $y_0$  differenzierbar ist, kann auf  $g$  in  $y_0$  stetig abgeschwächt werden, wie der folgende Satz zeigt.

**THEOREM 9.4** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv, an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und  $f'(x_0) \neq 0$ . Ist die Umkehrfunktion  $g$  von  $f$  an der Stelle  $y_0 = f(x_0)$  stetig, so ist  $g$  an der Stelle  $y_0$  sogar differenzierbar und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Beweis.** Die Differenzierbarkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0$  beinhaltet

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0), \quad f_1(x_0) = f'(x_0).$$

Setze  $y = f(x)$ ,  $y_0 = f(x_0)$  und verwende  $x = g(y)$ . Dann folgt

$$y - y_0 = f_1(g(y)) \cdot (g(y) - g(y_0)).$$

Die Abbildung  $f_1 \circ g$  ist an der Stelle  $y_0$  stetig und

$$f_1(g(y_0)) = f_1(x_0) = f'(x_0) \neq 0.$$

In Umgebung von  $y_0$  gilt daher

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{f_1(g(y))}(y - y_0),$$

wobei die Abbildung  $y \rightarrow 1/f_1(g(y))$  in  $y_0$  stetig ist.

**Beachte:** Die Injektivität von  $f$  kann im allgemeinen nicht aus  $f'(x_0) \neq 0$  (auch nicht lokal!) gefolgert werden. Dazu betrachten wir die in Abb. 14 dargestellte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wir haben  $f'(0) = 1 \neq 0$ , aber die stetige Abbildung  $f$  ist in keiner Umgebung von  $x_0 = 0$  injektiv. Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz unter Beachtung von

$$f(x_{2k+1}) < f(x_{2k-1}) < f(x_{2k}), \quad x_k = \frac{1}{k}.$$

Jeder Wert aus dem Intervall  $(f(x_{2k-1}), f(x_{2k}))$  wird also in  $(x_{2k+1}, x_{2k-1})$  mindestens zweimal angenommen.

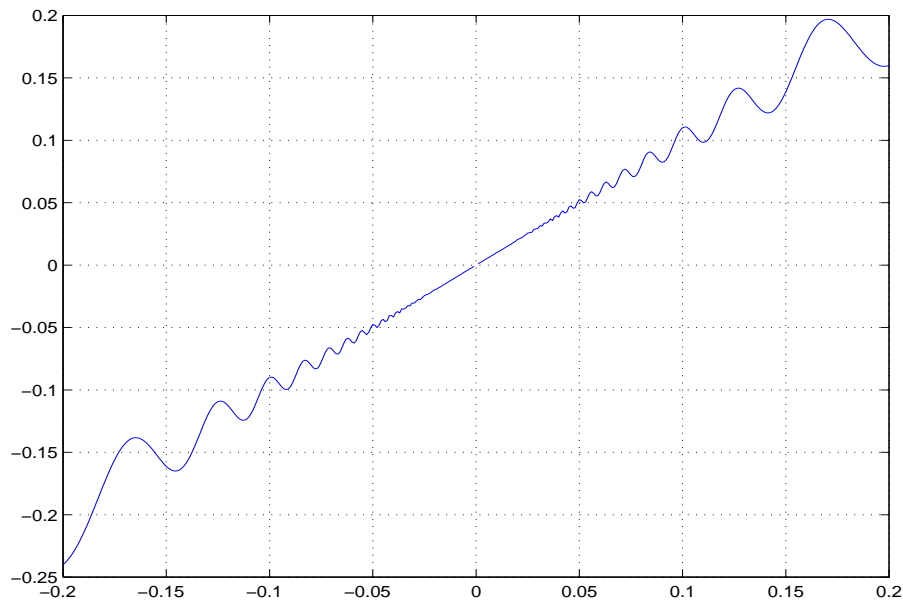


Abbildung 14: Funktion  $f(x)$

## 9.2 Mittelwertsatz

**Motivation.** Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so ist der Zuwachs

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Wie groß ist der Zuwachs tatsächlich? Antwort darauf gibt der Mittelwertsatz. Wir betrachten zuvor einen Spezialfall.

**THEOREM 9.5** (*Satz von Rolle*)

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  stetig, auf  $(a, b)$  differenzierbar und  $f(a) = f(b)$ . Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

**Beweis.** Die Abbildung  $f$  ist auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  stetig, nach dem Satz von Weierstraß nimmt  $f$  auf  $[a, b]$  Supremum und Infimum als Funktionswerte an.

(i)  $f(a) = f(b) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .

(ii) Sei  $f(x) > f(a)$  für ein  $x \in (a, b)$  und  $f(\xi) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Dann gilt

$$f(x) \leq f(\xi) \quad \forall x \in [a, b].$$

Nun ist  $f$  in  $\xi$  differenzierbar, d.h.,

$$f(x) - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + r(x)(x - \xi) \leq 0.$$

In Umgebung von  $\xi$  ist  $x - \xi$  positiv und negativ, für  $x \rightarrow \xi + 0$  folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

für  $x \rightarrow \xi - 0$

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0,$$

also  $f'(\xi) = 0$ .

(iii) Der Fall  $f(x) < f(a)$  für ein  $x \in (a, b)$  verläuft analog.

**THEOREM 9.6** (Mittelwertsatz)

Die Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

**Beweis.** Anwendung des Satzes von Rolle auf die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

**FOLGERUNG 9.3** (Kennzeichnung der konstanten Funktionen)

Sei  $I$  ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Dann ist  $f$  auf  $I$  konstant.

**Beweis.** Sei  $a \in I$  beliebig und  $x \in I$ ,  $x \neq a$ . Dann gilt auf jedem Intervall  $[a, x]$  bzw.  $[x, a]$  der Mittelwertsatz

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0.$$

Also ist  $f(x) = f(a)$  für alle  $x \in I$ .

Die nächste Folgerung liefert einen Beitrag zum Umkehrproblem der Differentialrechnung.

**DEFINITION 9.3** Gibt es zu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in D$ , so heißt  $F$  Stammfunktion zu  $f$ .

**FOLGERUNG 9.4** Ist  $D \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und hat  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D$  eine Stammfunktion  $F$ , so erhält man alle Stammfunktionen zu  $f$  durch Addition von Konstanten.

**Beweis.** Aus  $F' = f$  und  $G' = f$  auf  $D$  folgt

$$(F - G)'(x) = 0 \quad \forall x \in D,$$

d.h.,  $F(x) - G(x) = \text{const}$  auf  $D$ .

### 9.3 Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen

**DEFINITION 9.4** Die Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $D$  monoton wachsend, wenn

$$(f(y) - f(x))(y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in D,$$

und auf  $D$  monoton fallend, wenn

$$(f(y) - f(x))(y - x) \leq 0 \quad \forall x, y \in D.$$

**THEOREM 9.7** Eine auf einem Intervall  $I$  definierte, differenzierbare Funktion  $f$  ist genau dann auf  $I$  monoton wachsend, wenn  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ .

**Beweis.** Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(i)  $f$  monoton wachsend  $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \forall y, x \in I \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0.$$

(ii)  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$  monoton wachsend

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$(f(y) - f(x))(y - x) = f'(\xi)(y - x)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in I.$$

**DEFINITION 9.5** Die Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $D$  streng monoton wachsend, wenn

$$(f(y) - f(x))(y - x) > 0 \quad \forall x, y \in D \text{ mit } x \neq y,$$

und auf  $D$  streng monoton fallend, wenn

$$(f(y) - f(x))(y - x) < 0 \quad \forall x, y \in D \text{ mit } x \neq y.$$

**THEOREM 9.8** Eine auf einem Intervall  $I$  definierte, differenzierbare Funktion  $f$  ist auf  $I$  genau dann streng monoton wachsend, wenn

(i)  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$  und

(ii) es kein Teilintervall  $I^* \subset I$  gibt, mit  $f'(x) = 0$  auf  $I^*$ .

**Beweis.** Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(a)  $f$  streng monoton  $\Rightarrow$  (i) und (ii).

Zunächst folgt aus der strengen Monotonie die Monotonie und somit (i). Angenommen es gäbe ein Teilintervall  $I^*$  mit  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in I^*$ . Dann haben wir nach der Folgerung aus dem Mittelwertsatz  $f(x) = \text{const}$  auf  $I^*$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) (i) und (ii)  $\Rightarrow f$  streng monoton.

Zunächst folgt aus (i) die Monotonie von  $f$  auf  $I$ . Angenommen  $f(x_1) = f(x_2)$  für  $x_1 < x_2$ , dann folgt für alle  $x \in [x_1, x_2]$

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1),$$

also  $f(x) = \text{const}$  auf  $[x_1, x_2]$ . Hieraus ergibt sich  $f'(x) = 0$  auf dem Teilintervall  $(x_1, x_2)$  im Widerspruch zu (ii).

## 9.4 Zweiter Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Mittelwertsatz und wenden die Verallgemeinerung nutzbringend für die Berechnung von Grenzwerten an.

**THEOREM 9.9** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$ , so dass

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

**Beweis.** Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) := (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Es gilt:  $\varphi$  stetig auf  $[a, b]$ , differenzierbar auf  $(a, b)$  und  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Nach dem Satz von Rolle gibt es daher ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $\varphi'(\xi) = 0$ . Nun ist

$$0 = \varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

**BEMERKUNG 9.3** Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann der zweite Mittelwertsatz in Quotientenform geschrieben werden. Sei zusätzlich  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so gilt

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(b) - g(a)).$$

Der Faktor  $g(b) - g(a)$  ist verschieden von Null, da andernfalls ein  $\xi^* \in (a, b)$  existiert mit  $g'(\xi^*) = 0$ . Also gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**BEMERKUNG 9.4** Ist  $g(x) = x$ , so ist  $g'(x) = 1 \neq 0$  für alle  $x$  und wir erhalten den (einfachen) Mittelwertsatz.

Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0,$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Sind  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , so existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x)$  nicht. Die Frage ist, welche Aussagen für den Grenzwert des Quotienten getroffen werden können, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

gilt. In diesem Fall spricht man von einem unbestimmtem Ausdruck, der Form  $0/0$ . Folgende Ausdrücke sind unbestimmt:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right), \quad (0 \cdot \infty), \quad (\infty - \infty), \quad (1^\infty), \quad (0^0), \quad (\infty^0).$$

**THEOREM 9.10** (*Regel von Bernoulli/ de l'Hospital*)

Seien  $f, g$  für  $x > x_0$  definiert und differenzierbar,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} g(x) = 0$$

sowie  $g(x) \neq 0$  und  $g'(x) \neq 0$ . Existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , so existiert

auch  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Beweis.** Wir setzen  $f$  und  $g$  stetig nach  $x_0$  fort und können  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  annehmen. Auf  $[x_0, x]$  wenden wir den zweiten Mittelwertsatz an und erhalten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{mit } x_0 < \xi < x.$$

Sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann existiert eine Folge  $(\xi_n)$  mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x_0.$$

Da der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$  existiert, existiert auch der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$  und beide sind gleich.

**BEMERKUNG 9.5** *Der Satz gilt unter modifizierten Voraussetzungen auch für unbestimmte Ausdrücke der Form  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  bzw. für Grenzwerte  $x \rightarrow x_0 - 0$ ,  $x \rightarrow x_0$  und  $x \rightarrow \pm\infty$ .*

## 9.5 Höhere Ableitungen

**DEFINITION 9.6** Sei  $f$  in jedem Punkt von  $B(x_0, r)$  differenzierbar. Ist die Abbildung  $f' : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar, so heißt  $f$  in  $x_0$  zweimal differenzierbar, in Zeichen

$$f''(x_0) := (f')'(x_0).$$

Allgemein definiert man die höheren Ableitungen rekursiv. Sei  $f^{(k)} : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar, so heißt  $f$  in  $x_0$   $k + 1$ -mal differenzierbar, in Zeichen

$$f^{(k+1)}(x_0) := (f^{(k)})'(x_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**FOLGERUNG 9.5** Sei  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal differenzierbar in  $x_0$ . Dann sind  $f, f', \dots, f^{(k-1)}$  in  $x_0$  stetig. Die  $k$ -te Ableitung ist nicht notwendig stetig.

**DEFINITION 9.7** Ist  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  in Umgebung von  $x_0$   $k$ -mal differenzierbar und die  $k$ -te Ableitung in  $x_0$  stetig, so heißt  $f$  in  $x_0$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Existiert die Ableitung  $f^{(k)}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , so heißt  $f$  unendlich oft differenzierbar.

Die Menge aller auf  $D$   $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}^k(D)$ , für  $\mathcal{C}^0(D)$  schreiben wir einfach  $\mathcal{C}(D)$  und die Menge der auf  $D$  unendlich differenzierbaren wird mit  $\mathcal{C}^\infty(D)$  notiert.

**BEMERKUNG 9.6** Es gilt die Inklusion für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^k(D) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}(D).$$

**Beachte:** Eine differenzierbare Funktion muss, wie das folgende Beispiel zeigt, nicht stetig differenzierbar sein.

**BEISPIEL 9.8** Betrachte die differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

deren Ableitung  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}$  nicht stetig ist (vgl. Abb. 15).

Die Ableitung  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Die Ableitung ist unstetig an der Stelle Null, denn für  $x_k = \frac{1}{2k\pi}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$x_k \rightarrow 0 \text{ und } f'(x_k) = 1, \quad \text{folglich } \lim_{k \rightarrow \infty} f'(x_k) \neq f'(0) = 0.$$

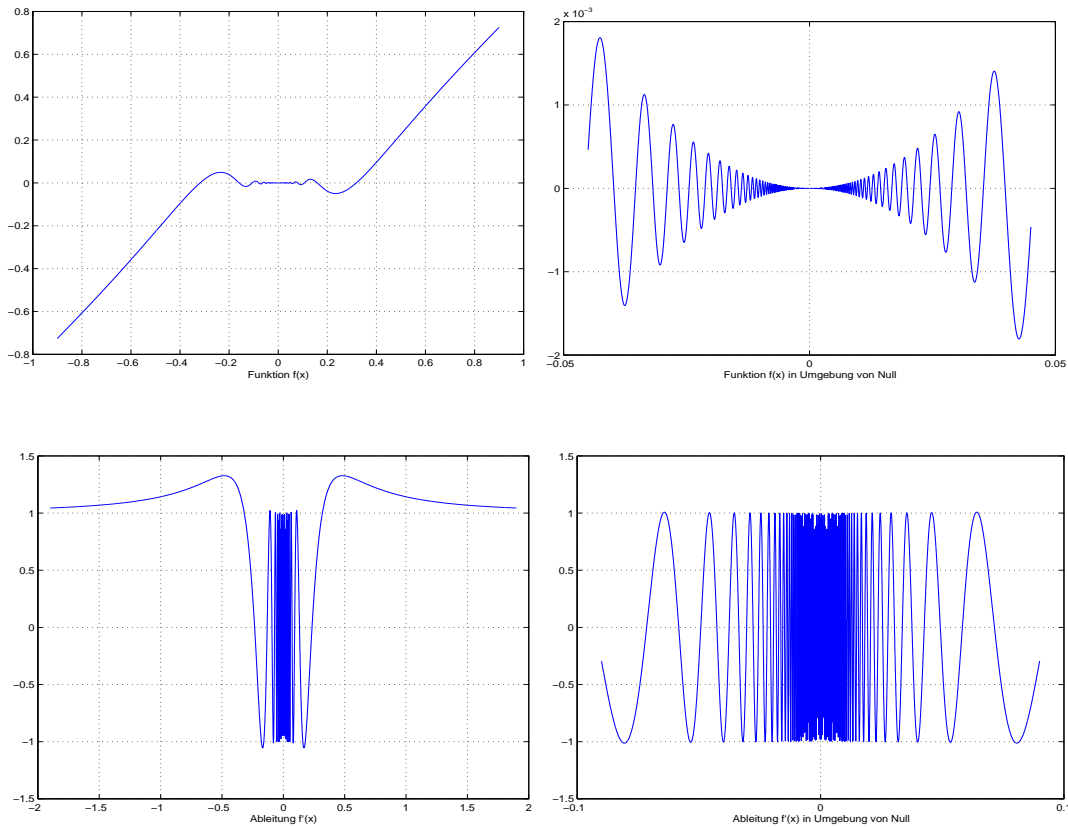


Abbildung 15: Darstellung einer im Punkt  $x = 0$  nicht stetig differenzierbaren Funktion (oben) und deren Ableitung (unten).

## 9.6 Konvexe Funktionen

**DEFINITION 9.8** Eine auf einem Intervall  $I$  definierte Funktion heißt konvex (von unten), wenn

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $I$  streng konvex, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \quad \forall \lambda \in (0, 1) : \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Setzt man  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = (1 - \lambda)$ , so erhält man eine äquivalente Charakterisierung der Konvexität,

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 : \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$



**THEOREM 9.11** *Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  konvex, so gilt*

$$\forall x_1, \dots, x_n \in I, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 : \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

**Beweis.** Vollständige Induktion,  $n = 1$  ist trivialerweise erfüllt,  $n = 2$  entspricht der Definition der Konvexität. Sei die obige Aussage für ein  $n \in \mathbb{N}$  richtig. Wir betrachten den Fall von  $n + 1$  Summanden, wobei wir o.B.d.A.  $\lambda_{n+1} \neq 1$  voraussetzen dürfen. Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1,$$

kann die Induktionsvoraussetzung (Aussage für für  $n$  Summanden) angewendet werden, folglich ist

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

**THEOREM 9.12** *Eine auf  $I$  differenzierbare Funktion  $f$  ist genau dann auf  $I$  konvex, wenn ihre Ableitung auf  $I$  monoton wachsend ist.*

**Beweis.** Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(a)  $f$  auf  $I$  konvex  $\Rightarrow f'$  auf  $I$  monoton.

Seien  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  und  $\lambda \in (0, 1)$ . Da  $f$  auf  $I$  konvex ist, gilt

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x),$$

woraus

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda(y - x)} \cdot (y - x) \leq f(y) - f(x),$$

und für  $\lambda \rightarrow +0$

$$f(x) + f'(x)(y - x) \leq f(y), \quad \forall x, y \in I, \quad x \neq y,$$

folgt. Diese Ungleichung lässt sich geometrisch wie folgt interpretieren: Die Tangente an  $f$  im jedem Punkt  $x \in I$  liegt für alle  $y \in I$  unterhalb der Funktion  $f$ . Durch Vertauschen von  $x$  und  $y$  haben wir auch

$$f(y) + f'(y)(x - y) \leq f(x),$$

woraus durch Addition unmittelbar

$$(f'(x) - f'(y))(x - y) \leq 0$$

folgt.

(b)  $f'$  auf  $I$  monoton  $\Rightarrow f$  auf  $I$  konvex.

Seien  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  mit  $\lambda \in [0, 1]$  und  $x_1 < x_2$ . Der Mittelwertsatz liefert

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

mit  $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ , also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit

$$\begin{aligned} x - x_1 &= (1 - \lambda)(x_2 - x_1) \geq 0 \\ x_2 - x &= \lambda(x_2 - x_1) \geq 0 \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\lambda(f(x) - f(x_1)) \leq (1 - \lambda)(f(x_2) - f(x)),$$

oder äquivalent

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

**THEOREM 9.13** Eine auf  $I$  zweimal differenzierbare Funktion ist genau dann konvex, wenn  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ .

**Beweis.** Die Behauptung folgt aus der Äquivalenz

$$f' \text{ auf } I \text{ monoton} \quad \Leftrightarrow \quad (f')'(x) = f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

## 9.7 Taylorsche Formeln

Die Frage der Differenzierbarkeit einer Funktion ist, wie wir gesehen haben, äquivalent zur lokalen Approximierbarkeit des Zuwachses durch eine lineare Funktion,

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Wir untersuchen nun allgemeiner, unter welchen Voraussetzungen sich glatte Funktionen lokal durch Polynome approximieren lassen. Wir beginnen mit einer Darstellungsformel für Polynome  $n$ -ten Grades.

**LEMMA 9.1** *Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Beweis.** Setzt man das Polynom allgemein in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

an, so erhält man sukzessive  $a_0 = f(x_0), \dots, a_k = f^{(k)}(x_0)/(k!)$ .

Wir betrachten nun allgemeiner  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktionen  $f$  auf einer konvexen Menge  $D$ .

**THEOREM 9.14** *(Taylorsche Formel mit Restgliedabschätzung)*

*Seien  $D$  konvex,  $f \in \mathcal{C}^n(D)$  und  $x_0 \in D$ . Dann gibt es ein  $R_n(f, x_0) \in \mathcal{C}^n(D)$  mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(f, x_0)(x), \quad x \in D.$$

*Das Restglied  $R_n(f, x_0)$  genügt der Abschätzung*

$$|R_n(f, x_0)(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0 < \theta < 1} |f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)) - f^{(n)}(x_0)| |x - x_0|^n, \quad x \in D.$$

**Beweis.** Seien  $x, z \in D$ . Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\Phi(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0 + z(x - x_0))}{k!} (x - x_0)^k (1 - z)^k - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n (1 - z)^n.$$

dann sind  $\Phi(0) = R_n(f, x_0)(x)$  und  $\Phi(1) = 0$ , sowie

$$\Phi'(z) = \frac{f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0 + z(x - x_0))}{(n-1)!} (1 - z)^{n-1} (x - x_0)^n.$$

Damit folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |R_n(f, x_0)(x)| &= |\Phi(1) - \Phi(0)| = |\Phi'(\theta)| \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0 < \theta < 1} |f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))| |x - x_0|^n. \end{aligned}$$

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , jedes  $f \in \mathcal{C}^n(D)$  und jedes  $x_0 \in D$  ist

$$P_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

ein Polynom  $n$ -ten Grades, das Taylorpolynom  $n$ -ten Grades von  $f$  an der Entwicklungsstelle  $x_0$  und

$$R_n(f, x_0) = f - P_n(f, x_0)$$

ist das Restglied  $n$ -ter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Seien nun zusätzlich  $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ , dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylorreihe von  $f$  mit der Entwicklungsstelle  $x_0$ . Hat die Taylorreihe den Konvergenzradius  $\rho > 0$ , so folgt daraus noch nicht, dass die Taylorreihe für  $|x - x_0| < \rho$  die Funktion  $f$  darstellt, wie das folgende Beispiel zeigt.

**BEISPIEL 9.9** Die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle  $x_0 = 0$  beliebig oft differenzierbar mit  $f^{(k)}(0) = 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Damit stellt die Taylorreihe die Funktion  $g(x) = 0 \neq f(x)$  dar.

Offensichtlich gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0)(x) = 0.$$

Basierend auf den zweiten Mittelwertsatz leiten wir nun verschiedene Darstellungen des Restgliedes  $R_n(f, x_0)$  ab.

**THEOREM 9.15** (Schlömilsche Restglieddarstellung)

Seien  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $p > 0$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ferner sei  $f$  auf  $I$   $n+1$ -mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem  $x \in I \setminus \{x_0\}$  ein  $\xi := x_0 + \theta(x - x_0)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , so dass

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!} \left( \frac{x - \xi}{x - x_0} \right)^{n-p+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

**Beweis.** Wir betrachten die Hilfsfunktionen  $\Phi, \Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\Phi(z) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (x-z)^k, \quad \Psi(z) := (x-z)^p.$$

Beide Funktionen sind auf  $I$  differenzierbar mit

$$\Phi'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (x-z)^n, \quad \Psi'(z) = -p(x-z)^{p-1}.$$

Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgt die Existenz einer Zahl  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$  mit

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \frac{\Phi'(\xi)}{\Psi'(\xi)} (\Psi(x) - \Psi(x_0)).$$

Nun gelten

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = R_n(f, x_0)(x), \quad \Psi(x) - \Psi(x_0) = -(x - x_0)^p,$$

woraus die Behauptung folgt.

**FOLGERUNG 9.6** (*Lagrangesche und Cauchysche Restglieddarstellung*)

Unter den Voraussetzungen von Theorem 9.15 gelten die Darstellungen von Lagrange und Cauchy

$$\begin{aligned} R_n(f, x_0)(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\ R_n(f, x_0)(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left( \frac{x - \xi}{x - x_0} \right)^n (x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die Darstellungen folgen aus Theorem 9.15 für  $p = n + 1$  bzw.  $p = 1$ .

**BEISPIEL 9.10** Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \cos x$  haben wir

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x,$$

somit gilt  $x_0 = 0$  und  $n = 2m + 1$

$$\cos x = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2m+1}(f, x_0)(x).$$

Wir betrachten das Verhalten des Restgliedes in der Lagrangeschen Form

$$R_{2m+1}(f, 0)(x) = \frac{(-1)^{m+1} \cos \xi}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad n = 2m \text{ oder } n = 2m - 1.$$

Aus  $|\cos \xi| \leq 1$  folgt sofort

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_{2m+1}(f, 0)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

die Taylorreihe von  $\cos x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  stellt also für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Funktion  $\cos x$  dar, in Zeichen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**BEISPIEL 9.11** Für  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = \{x : x > -1\}$  und  $f(x) = \ln(1+x)$  haben wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

woraus

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(f, 0)(x)$$

folgt.

Im folgenden untersuchen wir das Verhalten des Restgliedes für  $n \rightarrow \infty$ . Das Restglied in der Lagrangeschen Form ergibt sich zu

$$R_n(f, 0)(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Sei zunächst  $x \in [0, 1]$ . Dann gilt wegen

$$0 \leq \frac{x}{1+\theta x} \leq 1, \quad \forall x \in [0, 1]$$

für das Restglied  $n$ -ter Ordnung

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(f, 0)(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Also haben wir

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \quad x \in [0, 1]$$

und speziell für  $x = 1$  folgt für die Summe der alternierenden Reihe

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Der Konvergenzradius der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$  ist  $\rho = 1$ , damit bleibt die Frage zu klären, ob die Reihe auch für  $x \in (-1, 0)$  die Funktion  $\ln(1+x)$  darstellt. Da

$$\left| \frac{x}{1+\theta x} \right|$$

für  $x \in (-1, 0)$  und  $\theta \in (0, 1)$  nicht mehr durch 1 beschränkt ist, ist die Lagrange'sche Form des Restgliedes ungeeignet, um das Verhalten des Restgliedes für  $n \rightarrow \infty$  zu untersuchen. Betrachten wir die Cauchysche Form des Restgliedes

$$R_n(f, 0)(x) = (-1)^n \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot \frac{x}{1+\theta x} \cdot x^n.$$

Aufgrund der Abschätzung

$$0 \leq \frac{1-\theta}{1+\theta x} \leq 1, \quad \theta \in (0, 1), \quad x \in (-1, 0)$$

folgt

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(f, 0)(x)| \leq \frac{|x|}{1+x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0.$$

Somit gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \quad x \in (-1, 1].$$

## 9.8 Lokale Extremwerttheorie

**DEFINITION 9.9**  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x_0 \in D$  ein lokales Minimum (lokales Maximum), wenn in einer Umgebung  $U(x_0)$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0))$$

gilt.

**THEOREM 9.16** (Notwendige Bedingung für Extrema)

Seien  $x_0$  ein lokales Extrema von  $f$  und  $f$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar. Dann gilt  $f'(x_0) = 0$ .

**Beweis.** Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

hat im Fall eines lokalen Extremwertes in  $x_0$  verschiedenes Vorzeichen für  $h > 0$  und  $h < 0$ . Durch Grenzübergang  $h \rightarrow \pm 0$  erhält man die Behauptung.

**THEOREM 9.17** (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Seien  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $B(x_0, r)$  zweimal differenzierbar,  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(x) < 0$ ) für alle  $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ . Dann hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

**Beweis.** Die Taylorsche Formel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2}(x - x_0)^2$$

ergibt unter Beachtung der Voraussetzungen

$$f(x) > f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(x) < f(x_0)) \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

**BEMERKUNG 9.7** Gilt  $f''(x_0) \neq 0$  und ist  $f''$  in  $x_0$  stetig, so hat  $f''(x)$  in Umgebung von  $x_0$  das gleiche Vorzeichen wie  $f''(x_0)$ .

**THEOREM 9.18** (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Seien  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $B(x_0, r)$   $2n$ -mal differenzierbar,  $f'(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$  und  $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$ . Ist  $f^{(2n)}$  in  $x_0$  stetig, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extrema, und zwar im Fall  $f^{(2n)}(x_0) > 0$  ein lokales Minimum und im Fall  $f^{(2n)}(x_0) < 0$  ein lokales Maximum.

**Beweis.** Unter Beachtung der Voraussetzungen erhalten wir aus der Taylorschen Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(2n)!}(x - x_0)^{2n},$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

**BEISPIEL 9.12** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , hat für gerade  $m \in \mathbb{N}$  ein lokales Maximum in  $x_0 = 0$ , denn  $f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$  und  $f^{(m)}(0) = m! > 0$ .

**Beachte:** Eine differenzierbare Funktion, die einen Extremwert in einem Punkt  $x_0$  annimmt, muss, wie das folgende Beispiel zeigt, in der Umgebung von  $x_0$  das Vorzeichen nicht wechseln.

**BEISPIEL 9.13** Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^4(2 + \sin \frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Wegen

$$f(x) = x^4(2 + \sin \frac{1}{x}) \geq 0 = f(0)$$



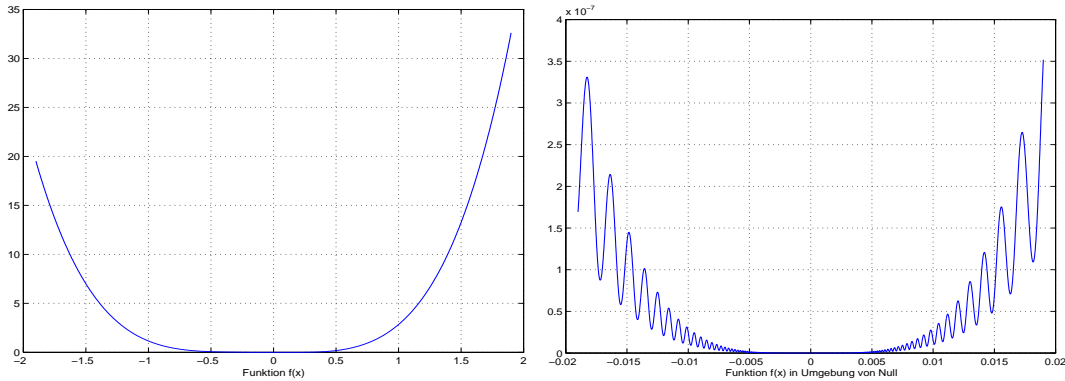


Abbildung 16: Globales und lokales Verhalten der Funktion aus Bsp. 9.13.

hat  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  ein globales Minimum (vgl. Abb. 16).

Die Funktion  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit der Ableitung  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 \left[ 4x \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right) - \cos \frac{1}{x} \right] & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für  $x_{2k} = \frac{1}{2k\pi}$  mit  $k \geq 1$  folgt

$$f'(x_{2k}) = x_{2k}^2 (8x_{2k} - 1) < 0$$

während für  $x_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)\pi}$

$$f'(x_{2k+1}) = x_{2k+1}^2 (8x_{2k+1} + 1) > 0$$

gilt (vgl. Abb. 17).

## 9.9 Banachscher Fixpunktsatz und Anwendungen

Die Bestimmung von Nullstellen gehört zu den Grundaufgaben. Sie ist wichtig sowohl für die Nullstellen selbst, darüber hinaus aber auch für die Suche nach lokalen Extrema. Sei  $x$  gesucht, so dass  $f(x) = 0$ . Wir erinnern zunächst an einige Existenzresultate.

(i) Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  stetig und  $f(a)f(b) < 0$ . Dann existiert mindestens eine Nullstelle  $\xi \in (a, b)$ .

(ii) Fundamentalsatz der Algebra

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades. Dann hat  $f$  genau  $n$  komplexe Nullstellen.

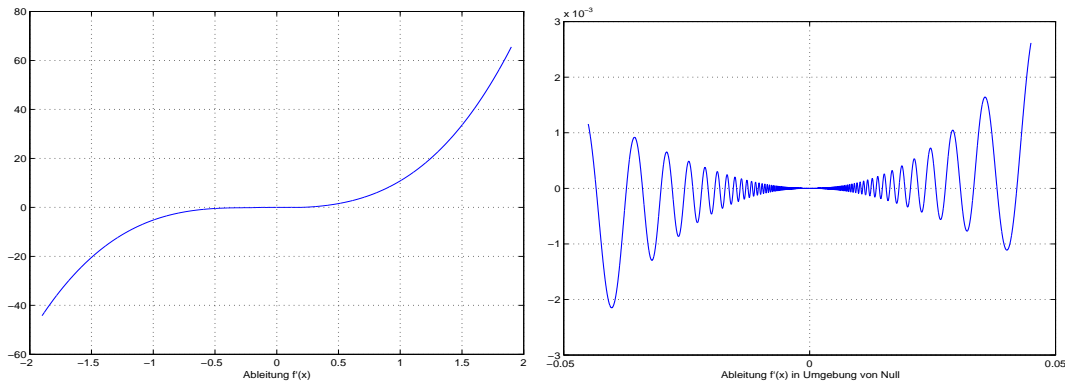


Abbildung 17: Globales und lokales Verhalten der Ableitung der Funktion aus Bsp. 9.13.

Hinsichtlich der Berechenbarkeit der Nullstellen eines Polynoms  $n$ -ten Grades gibt es geschlossene Lösungsformeln für  $n \leq 4$  und es ist bekannt, dass im allgemeinen keine geschlossene Lösungsformel für  $n \geq 5$  existiert. Die komplizierteren Formeln für  $n = 3$  (bekannt nach G. Cardano, 1501-1576, tatsächlich aber gefunden von N. Tartaglia um 1500-1557) und  $n = 4$  (L. Ferrari, 1522-1565) finden jedoch für Berechnungen kaum Anwendung. Somit wird eine approximative Bestimmung der Nullstellen notwendig. Dies gilt insbesondere für Abbildungen  $f$ , die kein Polynom darstellen.

Wir formulieren die Aufgabe im Banachraum. Seien  $(E, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und  $P : A \subset E \rightarrow E$ . Wir suchen Lösungen der Gleichung

$$x = P(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) := x - P(x) = 0.$$

**DEFINITION 9.10** Ein Punkt  $x \in A$  heißt Fixpunkt der Abbildung  $P : A \subset E \rightarrow E$ , wenn  $x = P(x)$ .

**DEFINITION 9.11** Die Abbildung  $P : A \subset E \rightarrow E$  heißt auf  $A$  kontraktiv, wenn es ein  $\alpha \in [0, 1)$  gibt, so dass

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \forall x, y \in A.$$

**BEMERKUNG 9.8** Schreibt man die letzte Ungleichung mittels der durch  $\|\cdot\|$  induzierten Metrik in der Form

$$d(P(x), P(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

so erkennt man, dass der Abstand der Bilder  $P(x), P(y)$  stets um mindestens einen Faktor  $\alpha$  kleiner als der Abstand der Urbilder  $x, y$  ist.

**THEOREM 9.19** (*Banachscher Fixpunktsatz*)

Seien  $A \subset E$  eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes  $(E, \|\cdot\|)$  und  $P : A \rightarrow A$  eine kontraktive Abbildung von  $A$  in sich. Dann gilt

- (i) Die Gleichung  $x = P(x)$  hat genau einen Fixpunkt  $x^* \in A$ .
- (ii) Der Fixpunkt  $x^* \in A$  ist Grenzwert einer Folge  $(x_n)$  der sukzessiven Approximationen

$$x_n = P(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

für jedes Startelement  $x_0 \in A$ .

- (iii) Für den Fehler gilt die Abschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|P(x_0) - x_0\|.$$

**Beweis.** Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

- (a) Die Folge der sukzessiven Approximationen ist Cauchyfolge in  $E$ .

Da  $P : A \rightarrow A$ , ist die Folge der sukzessiven Approximationen wohldefiniert. Wir schätzen zunächst den Abstand zweier aufeinander folgender Glieder ab.

$$\begin{aligned} \|x_i - x_{i-1}\| &= \|P(x_{i-1}) - P(x_{i-2})\| \leq \alpha \|x_{i-1} - x_{i-2}\| \leq \alpha^2 \|x_{i-2} - x_{i-3}\| \\ &\vdots \\ \|x_i - x_{i-1}\| &\leq \alpha^{i-1} \|P(x_0) - x_0\|, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für  $m > n \geq 1$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &:= \|x_m - x_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^m (x_i - x_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|x_i - x_{i-1}\| \\ &\leq \|P(x_0) - x_0\| \sum_{i=n+1}^m \alpha^{i-1} = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \|P(x_0) - x_0\| \\ d(x_m, x_n) &< \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|P(x_0) - x_0\|, \end{aligned}$$

also gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Indexschränke  $n_0(\varepsilon)$ , so dass für alle  $m \geq n > n_0(\varepsilon)$

$$d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|P(x_0) - x_0\| < \varepsilon.$$

Ein mögliches  $n_0(\varepsilon)$  ist gegeben durch

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon - \ln((1 - \alpha) \|P(x_0) - x_0\|)}{\ln \alpha}.$$

(b) Die Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen einen Fixpunkt  $x^* \in A$ .

Da  $(x_n) \subset A$  Cauchyfolge ist und  $E$  nach Voraussetzung ein Banachraum ist, konvergiert  $(x_n)$  in  $E$  gegen ein Element  $x^*$ . Aus der Abgeschlossenheit von  $A$  folgt  $x^* \in A$ . Wir zeigen, dass  $x^*$  Fixpunkt von  $P$  ist,

$$\|x^* - P(x^*)\| \leq \|x^* - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - P(x^*)\| \leq \|x^* - x_{n+1}\| + \alpha \|x_n - x^*\|.$$

Die linke Seite der Ungleichung ist unabhängig von  $n$ , die rechte Seite strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Damit muss auch die nichtnegative linke Seite verschwinden und es gilt  $x^* = P(x^*)$ .

(c) Es gibt höchstens einen Fixpunkt in  $A$ .

Angenommen wir haben zwei Fixpunkte  $x_1^*, x_2^* \in A$  mit  $x_1^* \neq x_2^*$  und  $x_i^* = P(x_i^*)$ ,  $i = 1, 2$ . Dann gilt

$$\|x_1^* - x_2^*\| = \|P(x_1^*) - P(x_2^*)\| \leq \alpha \|x_1^* - x_2^*\|,$$

oder

$$(1 - \alpha) \|x_1^* - x_2^*\| \leq 0,$$

woraus  $x_1^* = x_2^*$  im Widerspruch zur Annahme folgt.

(d) Fehlerabschätzung.

Wir haben

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|P(x_0) - x_0\| + \|x_m - x^*\|.$$

Hieraus ergibt sich durch Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  für jedes (feste  $n \in \mathbb{N}$ ) die gewünschte Abschätzung.

**BEISPIEL 9.14** *Gesucht seien die Nullstellen von  $f(x) = \cos x - x$ . Wegen  $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$  und  $f(-\pi/2) = +\pi/2 > 0$  gibt es mindestens eine Nullstelle von  $f$  in  $(-\pi/2, +\pi/2)$ . Die Ableitung  $f'(x) = -\sin x - 1$  ist auf  $\mathbb{R}$  nichtnegativ und es gibt kein Intervall, in dem  $f'$  verschwindet. Also ist  $f$  streng monoton fallend und es gibt nur die in  $(-\pi/2, +\pi/2)$  existierende Nullstelle. Zur Berechnung der Nullstelle setzen wir  $A = [-1, +1]$ ,  $E = \mathbb{R}$  und  $P(x) = \cos x$ . Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind gegeben, insbesondere ist die Abbildung  $P : [-1, +1] \rightarrow [-1, +1]$  nach dem Mittelwertsatz*

$$|\cos x - \cos y| = |\sin \xi| |x - y| \leq \alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in [-1, +1]$$

*kontraktiv mit  $\alpha = \sin 1 < 1$ . Für die Folge der sukzessiven Approximationen erhält man*

<i>Nr. der Iteration</i>	<i>Näherungswert <math>x_n</math></i>
0	0.0
1	1.0
2	0.540 302
3	0.857 553
4	0.654 290
5	0.793 480
6	0.701 369
$\vdots$	$\vdots$
27	0.739 094
$\vdots$	$\vdots$
36	0.739 085

Wir betrachten im folgenden ein weiteres iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen, das Newton-Verfahren. Die Kernidee besteht in der Approximation von  $f$  in Umgebung der Nullstelle durch das Taylorpolynom 1. Grades. Sei  $x_n$  eine Näherung für die gesuchte Nullstelle  $x^*$  von  $f$ . Dann ergibt sich die Bestimmungsgleichung für eine verbesserte Näherung aus

$$0 = f(x^*) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

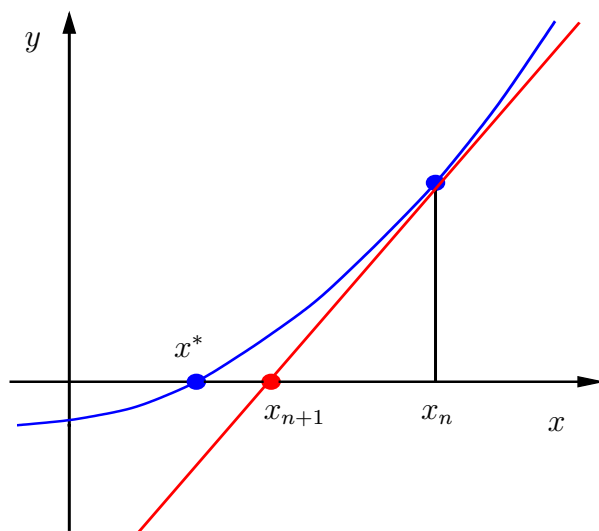


Abbildung 18: Bestimmung der verbesserten Näherung  $x_{n+1}$  aus Nullstelle des Taylorpolynoms ersten Grades an der Stelle  $x_n$

Für die neue Näherung erhält man die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zur Durchführbarkeit des Newton-Verfahrens muss in jedem Schritt  $f$  an der Stelle  $x_n$  differenzierbar sein und  $f'(x_n) \neq 0$  gelten.

**THEOREM 9.20** (*Konvergenz des Newton-Verfahrens*)

Seien  $f : B(x^*, r) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar,  $f(x^*) = 0$  und  $f'(x^*) \neq 0$ . Dann gibt es eine abgeschlossene Kugel  $\bar{B}(x^*, r_0)$  derart, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert  $x_0 \in \bar{B}(x^*, r_0)$  durchführbar ist und die Folge  $(x_n)$  gegen  $x^*$  konvergiert.

**Beweis.** Wegen  $f'(x^*) \neq 0$  und  $f'$  in  $x^*$  stetig, gibt es eine Kugel  $B(x^*, r_1)$ ,  $r_1 \leq r$ , in der  $f'(x) \neq 0$ . Für einen noch zu fixierenden Wert  $0 < r_0 < r_1$  betrachten wir die Abbildung

$$P : \bar{B}(x^*, r_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Fixpunkte von  $P$  sind Nullstellen von  $f$  und umgekehrt. Wir zeigen, dass  $P$  den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt. Hieraus folgt unmittelbar die Aussage des Satzes.

(i)  $P : \bar{B}(x^*, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$  ist kontraktiv.

Die Abbildung  $P$  ist differenzierbar und es gilt

$$P'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Für die stetige Abbildung  $P'$  gilt  $P'(x^*) = 0$ , also gibt es eine Umgebung von  $x^*$ , in der  $|P'(x)| \leq 1/2$ . Wir fixieren  $r_0$  derart, dass  $0 < r_0 < r_1$  und  $|P'(x)| \leq 1/2$  für alle  $x \in \bar{B}(x^*, r_0)$ . Dann folgt nach dem Mittelwertsatz

$$|P(x) - P(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \quad \forall x, y \in \bar{B}(x^*, r_0).$$

(ii)  $P : \bar{B}(x^*, r_0) \rightarrow \bar{B}(x^*, r_0)$ .

In der Tat haben wir

$$|P(x) - x^*| = |P(x) - P(x^*)| \leq \frac{1}{2}|x - x^*| \leq \frac{r_0}{2} \leq r_0.$$

**BEISPIEL 9.15** *Wir betrachten erneut das Beispiel 9.14 und wenden die Iterationsvorschrift*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{1 + \sin x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*an. Für die Folge der Newton-Iterationen erhält man*

Nr. der Iteration	Näherungswert $x_n$
0	0.0
1	1.0
2	0.750 364
3	0.739 113
4	0.739 085

also bereits in vier Schritten den Näherungswert 0.739085. Obgleich der Aufwand für einen Iterationsschritt bei Newton-Verfahren durch die beiden Funktionsauswertungen etwa doppelt so hoch ist, benötigen wir nur 1/9 der Iterationschritte bei gleicher Genauigkeit.

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Newton-Verfahren im allgemeinen nur lokal konvergiert.

**BEISPIEL 9.16** Wir möchten die Nullstelle  $x = 0$  der Abbildung  $f(x) = \arctan x$  mit dem Newton-Verfahren berechnen. Die Iterationsvorschrift lautet

$$x_n = x_{n-1} - (1 + x_{n-1}^2) \arctan x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für die Folge der Newton-Iterationen erhält man:

Nr. der Iteration	Näherungswert $x_n$		
	Startwert 1	Startwert 2	Startwert 3
0	+1.00000e+01	+1.40000e+00	+1.30000e+00
1	-1.38584e+02	-1.41362e+00	-1.16162e+00
2	+2.98923e+04	+1.45013e+00	+8.58897e-01
3	-1.40353e+09	-1.55063e+00	-3.74241e-01
4	+3.09429e+18	+1.84706e+00	+3.40189e-02
5	-1.503983+37	-2.89358e+00	-2.62409e-05
6	—	+8.71045e+00	+0.00000e+00
⋮	⋮	⋮	
11	—	-1.32222e+35	

Wählt man einen zu weit von der Nullstelle entfernten Startwert, so divergiert sogar das Verfahren, obgleich keine weitere Nullstelle von  $f$  existiert. Die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes sind erfüllt, insbesondere gilt  $f'(x^*) = 1 \neq 0$ . Somit gibt es eine Umgebung der Nullstelle  $x^* = 0$ , in der das Newton-Verfahren konvergiert. Die theoretische Aussage wird mit obigem Beispiel bestätigt.