Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 08.01.2013
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 12

(**mögliche Abgabe:** Aufgaben **1 - 3** am Dienstag, 22.01.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Seien $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ zwei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^2$, P das Parallelogramm $P = \{sv + tw \mid 0 \le s, t \le 1\}$ sowie F definiert durch
$$F = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right| .$$
Zeigen Sie, dass F der Flächeninhalt von P ist.
(**3 Punkte**)

2. Ermitteln Sie durch Betrachtung einer entsprechenden Determinante, für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ die folgende Menge von drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig ist
$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 3 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 5 \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$
(**4 Punkte**)

3. Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+i \\ -i & 2+3i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
(**3+3 Punkte**)

4. Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1-i & i \\ 2 & 5+i & 3-2i \end{pmatrix} .$$

5. Hat das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a+c \\ -b-c \end{pmatrix}$$
genau eine Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

6. Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ eine reguläre quadratische Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ der rechte-Seite-Vektor des Gleichungssystems $Ax = b$. Beweisen Sie die **Cramersche Regel** für die k-te Komponente x_k des Lösungsvektors $x = A^{-1}b$

$$x_k = \frac{\det(a^1, \ldots, a^{k-1}, b, a^{k+1}, \ldots, a^n)}{\det(A)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

wobei $a^1, \ldots, a^n$ die Spaltenvektoren von A bezeichnen und bei der Matrix der Determinante im Zähler der k-te Spaltenvektor der Vektor b ist und ansonsten die Spaltenvektoren von A übernommen werden. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der Lösungsvektor. Zeigen Sie, dass dann der Vektor b als folgende Linearkombination der Spaltenvektoren von A geschrieben werden kann

$$b = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j.$$

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a) sowie der Rechenregeln für Determinanten, dass gilt

$$\det(a^1, \ldots, a^{k-1}, b, a^{k+1}, \ldots, a^n) = x_k \det(A).$$