Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 18.12.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 11
(zur Wiederholung – keine Abgabe)

1. Sei E_1 die Ebene senkrecht zum Vektor $N_1 = (2, -1, 1)$ durch den Punkt $p_1 = (2, 1, 2)$ und E_2 die Ebene senkrecht zum Vektor $N_2 = (6, -4, 2)$ durch den Punkt $p_2 = (2, 1, -3)$.

   a) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle(N_1, N_2)$.

   b) Bestimmen Sie jeweils die Hessesche Normalform von E_1 und E_2 und berechnen Sie den Abstand des Punktes $q = (0, 1, 0)$ zu E_1.

   c) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung $g = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x = p + ta, \, t \in \mathbb{R}\}$ der Schnittgeraden $g = E_1 \cap E_2$, indem Sie g als Lösungsmenge desjenigen Gleichungssystems bestimmen, bei dem die beiden Gleichungen äquivalent zu den beiden Ebenengleichungen in Hessescher Normalform sind und der Lösungsvektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ der allgemeine Punkt $x \in g$ ist. Multiplizieren Sie vorher, um Wurzelausdrücke zu vermeiden, die Ebenengleichungen mit geeigneten Faktoren.

2. Welche der folgenden Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

   a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 x_2 + x_3 = 0\}$,

   b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 - x_2 = 0\}$.

3. Zeigen Sie, dass
$$U = \{(a, b, a, b) \in \mathbb{R}^4 | \, a, b \in \mathbb{R}\}$$
ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie eine Basis von U an.

4. Liegt der Vektor $w = (-1, -1, -1)$ in $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, wobei $v_1 = (1, 2, 3)$ und $v_2 = (2, 2, 1)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Gegeben seien die beiden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$
$$U_1 := \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}, \qquad U_2 := \operatorname{span}\{v_4, v_5\},$$
wobei
$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, -1), \quad v_4 = (0, 1, 1), \quad v_5 = (1, 1, 0).$$

   a) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

   b) Berechnen Sie $\dim(U_1 + U_2)$.

6. Sei $C \in M(n \times n; \mathbb{K})$ eine fest vorgegebene Matrix und die Abbildung $F : M(n \times n; \mathbb{K}) \to M(n \times n; \mathbb{K})$ definiert durch
$$F(A) := A \cdot C.$$
Zeigen Sie, dass F linear ist und dass F ein Isomorphismus ist, falls die Inverse von C existiert.

7. Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, dass $f(e_i) = v_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (0, 1, 2), \quad v_3 = (1, 0, 1)$$

gilt.

a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Ist f surjektiv bzw. injektiv (mit Begründung) ?

8. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + x_2,\ 3x_2 + 4x_3,\ -4x_1 + x_2 + 4x_3).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\ker f$ und berechnen Sie den Rang von f.

9. Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 14 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie außerdem $A \cdot B$ und $B \cdot A$, sofern dies möglich ist.

10. Gegeben sei in Abhängigkeit von α die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R}).$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Rangkriteriums: Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann für jedes $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar, wenn $\alpha \neq 1$ ist.

b) Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ im Fall $\alpha = 1$ und $b = (-2, 1, 1)^T$.

11. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 5 \\ 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$