Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

11.12.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 10

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 19.12.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Sei E_3 die Einheitsmatrix in $M(3 \times 3; \mathbb{R})$. Berechnen Sie ausgehend von der erweiterten Matrix $(A|E_3)$ mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(**5 Punkte**)

2. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 4x_2 & + & ax_3 & = & -6 \\ 8x_1 & - & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 2 \end{array}$$

Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem keine Lösung hat. Geben Sie für den Fall $a = -2$ alle Lösungen an.

(**5 Punkte**)

3. Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, wobei $p_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, \ldots, 4$. Zu der linearen Abbildung $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^3$, welche definiert ist durch

$$F(p) := \left(\int_{-1}^{1} p(x)\, dx,\ p(0),\ p'(0) \right),$$

sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f := \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ die zugehörige Abbildung der Koordinaten, wobei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichne. Berechnen Sie $\mathrm{rg}(F)$, indem Sie den Rang der zu f gehörenden Matrix $A \in M(3 \times 4; \mathbb{R})$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$ bestimmen.

(**5 Punkte**)

4. Sei E_3 die Einheitsmatrix in $M(3 \times 3; \mathbb{R})$. Berechnen Sie ausgehend von der erweiterten Matrix $(A|E_3)$ mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit der auftretenden Parameter:

a)

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_6 &= -2\\
-4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 - x_5 &= -7\\
6x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 14x_4 - x_5 + 12x_6 &= 1 + p_1\\
-4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 + 10x_6 &= -p_2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 2\\
-2x_1 + x_3 &= -2\\
5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4\\
2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= p_1
\end{aligned}$$

6. Gegeben seien die Funktionen $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, durch:

$$g_1(x) = e^x, \qquad g_2(x) = \sin(x), \qquad g_3(x) = \cos(x).$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{A} = \{g_1, g_2, g_3\}$ eine Basis des Vektorraumes $U = \operatorname{span}\{g_1, g_2, g_3\}$ ist. Die lineare Abbildung F sei als Ableitung definiert durch

$$F : U \to U, \qquad F(g) := g' \quad \forall\, g \in U.$$

Begründen Sie, warum $F(U) \subset U$ gilt. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die zu F gehörende Abbildung der Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ mit $f := \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ und $A \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ die zu f gehörende Matrix mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $\operatorname{rg}(F)$, indem Sie den Rang der Matrix A untersuchen. Ist die Abbildung $F : U \to U$ invertierbar ?