Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 04.12.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 9

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 12.12.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{K}).$$
Zeigen Sie:

a) Ist $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, so gilt $B \cdot A = E_2$ (d.h. $B = A^{-1}$) für die Matrix
$$B = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

b) Im Fall $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ ist A singulär.

(**2+2 Punkte**)

2. Gegeben seien die Basen $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ und $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ mit
$$v_1 = (1,1), \quad v_2 = (-1,2), \qquad w_1 = (3,2), \quad w_2 = (0,2).$$
Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Ermitteln Sie hierzu zunächst die Elemente s_{ij} der Matrix $S \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$, so dass für $j = 1,2$ gilt $w_j = \sum_{i=1}^{2} s_{ij} v_i$. Berechnen Sie die jeweiligen Koordinaten des Vektors $x = v_1 + v_2$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(**5 Punkte**)

3. a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebige Zahlen und $A \in M(2 \times 3; \mathbb{R})$ die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & c \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(A)$ in Abhängigkeit von a, b und c.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(A)$ für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -6 & 9 & 13 \\ 14 & -23 & -34 \end{pmatrix}.$$

(**2+2 Punkte**)

4. Zum Vektorraum $\mathbb{P}_1$ der Polynome vom Grad ≤ 1 seien $\mathcal{A} = \{p_1, p_2\}$ und $\mathcal{B} = \{q_1, q_2\}$ Basen mit
$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x - 1, \qquad q_1(x) = x - 2, \quad q_2(x) = 2x.$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Ermitteln Sie hierzu zunächst die Elemente s_{ij} der Matrix $S \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$, so dass für $j = 1, 2$ gilt $q_j = \sum_{i=1}^{2} s_{ij} p_i$. Berechnen Sie die jeweiligen Koordinaten des Polynoms $p = 2p_1 - p_2$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

5. Berechnen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} i & 3-i \\ 2+i & 1-7i \end{pmatrix}.$$

6. Die Spur einer Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ mit den Elementen a_{ij} wird definiert durch

$$\operatorname{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zeigen Sie für beliebige Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{K})$, dass

a) $\operatorname{spur}(A \cdot B) = \operatorname{spur}(B \cdot A)$,

b) $\operatorname{spur}(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \operatorname{spur}(B)$, falls A invertierbar ist.