Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 27.11.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 8

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 05.12.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jeweils die zugehörige Matrix A derart, dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(v) = a \times v$, wobei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt sei.

   b) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = (z_1 - 2iz_2,\ iz_1 + 2z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

   (**3+2 Punkte**)

2. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie jeden der folgenden Ausdrücke oder begründen Sie warum er nicht definiert ist:
   AB, BA, CD, DC, BC, BD, $(A+B)C$, $(BC)D$.

   (**7 Punkte**)

3. Sei $\mathbb{P}_2 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p \text{ ist reelles Polynom vom Grad} \leq 2\}$ und $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung definiert durch $F(p) := (p(-1), p(0), p(1))$.

   a) Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ein Isomorphismus ist.

   b) $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3\}$ mit $p_i(x) = x^{i-1}$ ist bekanntlich eine Basis von $\mathbb{P}_2$. Sei $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ der zugehörige Koordinaten-Isomorphismus. Berechnen Sie die Abbildung $f = F \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, indem Sie $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ für beliebiges $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ angeben. Bestimmen Sie weiterhin diejenige Matrix $A \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ mit $f(\alpha) = A\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^3$.

   (**2+2 Punkte**)

4. Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jeweils die zugehörige Matrix A derart, dass $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3,\ 2x_2,\ 2x_1 + x_3)$.

   b) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1\bar{a}_1 + z_2\bar{a}_2$ wobei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ fest gewählt sei.

5. Durch

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2,\ 2x_2 + 4x_4,\ -3x_3 - 4x_4), \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_2,\ x_2 + x_3),$$

   werden lineare Abbildungen $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert.

a) Bestimmen Sie diejenigen Matrizen $A_1 \in M(3 \times 4; \mathbb{R})$ und $A_2 \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ mit $f_i(x) = A_i x$, $i = 1, 2$, für alle x des Definitionsbereiches von f_i.

b) Berechnen Sie die Abbildung $f_2 \circ f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und die zugehörige Matrix $A \in M(3 \times 4; \mathbb{R})$ mit $f_2 \circ f_1(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Vergleichen Sie A mit dem Matrizenprodukt $A_2 A_1$.

6. Sei $\mathbb{P}_3 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p \,\text{ist reelles Polynom vom Grad} \leq 3\}$ und $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ die Abbildung definiert durch $F(p) := p + p'$.

a) Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ ein Isomorphismus ist.

b) $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ mit $p_i(x) = x^{i-1}$ ist bekanntlich eine Basis von $\mathbb{P}_3$. Sei $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3$ der zugehörige Koordinaten-Isomorphismus. Berechnen Sie die Abbildung $f = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, indem Sie $f(\alpha)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}^4$ angeben. Bestimmen Sie weiterhin diejenige Matrix $A \in M(4 \times 4; \mathbb{R})$ mit $f(\alpha) = A\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^4$.

7. Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $M(2 \times 3; \mathbb{K})$. Welche Dimension hat der $\mathbb{K}$-Vektorraum $M(m \times n; \mathbb{K})$?