Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck 20.11.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 7

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 4** am Mittwoch, 28.11.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$F(1,2,3) = (1,1), \quad F(-2,3,1) = (1,0), \quad F(4,1,5) = (0,1).$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Basis von $\mathrm{span}\{(1,2,3),(-2,3,1),(4,1,5)\}$.

(**3 Punkte**)

2. Welche der folgenden Abbildungen F sind linear und welche nicht ? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y,z) = (xy,\, x+y)$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (3x+2y,\, 4x+y)$.

Untersuchen Sie F für den Fall, dass die Abbildung linear ist, auf Surjektivität und Injektivität und ermitteln Sie, ob F ein Isomorphismus ist.

(**2 + 2 + 3 Punkte**)

3. Sei $a \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit $\|a\| = 1$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $g = \{ta \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, von der in der Vorlesung die Formel

$$f(v) = 2\,\langle v, a\rangle\, a - v \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^2$$

bewiesen wurde. Zeigen Sie, dass f linear ist, und bestimmen Sie $\ker f$ und $\mathrm{Im}\, f$.

(**3 Punkte**)

4. Sei $\mathbb{P}_m := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p \text{ ist reelles Polynom vom Grad} \le m\}$ und F die Abbildung

$$F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3, \qquad F(p)(x) := xp(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass F linear ist.

b) Bestimmen Sie $\ker F$ und $\mathrm{Im}\, F$. (**2+2 Punkte**)

5. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F : V \to V$ eine lineare Abblidung, welche *idempotent* ist, d.h. es gilt $F \circ F = F$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Im}\, F \cap \ker F = \{0\}$,

b) $\mathrm{Im}\, F \oplus \ker F = V$.

6. Welche der folgenden Abbildungen F sind linear und welche nicht ? Begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (7x + 14y,\ x + 2y),$

   b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, z) = (|x|,\ x - y + z).$

   Bestimmen Sie für den Fall, dass die Abbildung linear ist, $\operatorname{Im} F$, $\ker F$ sowie $\operatorname{rg}(F)$.

7. Sei $\mathbb{P}_m := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p \text{ ist reelles Polynom vom Grad} \le m\}$ und G die Abbildung

$$G : \mathbb{P}_m \to \mathbb{P}_m, \qquad G(p)(x) := p'(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie jeweils eine Basis für $\ker G$ und $\operatorname{Im} G$.

8. Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau ein $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ gibt, so dass

$$f(v) = \langle a, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \forall\, v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n.$$