Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck 13.11.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 6

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 21.11.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren und

$$w := \frac{1}{\|u \times v\|}(u \times v).$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{u, v, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(**3 Punkte**)

2. Zeigen Sie folgende Aussagen:

   a) Die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ ist 4.

   b) Es gilt $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$, wenn U_1, U_2 zwei Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind mit $\dim U_i \geq 2$, $i = 1, 2$.

(**2 + 2 Punkte**)

3. Gegeben seien die beiden Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$

$$U_1 := \operatorname{span}\{(1,3,1), (1,0,-1), (-1,3,3)\}, \qquad U_2 := \operatorname{span}\{(1,3,2), (-2,-6,-4)\}.$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

(**8 Punkte**)

4. Warum bilden die Polynome

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 \qquad \text{und} \qquad p_2(x) = 3x^2 - 2$$

keine Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_2$ aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2 ? Ergänzen Sie $\{p_1, p_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{P}_2$.

5. Seien U_1, U_2 die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$

$$U_1 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 = x_2 = x_3\}, \qquad U_2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$.

6. Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (2,1,3), \quad v_3 = (-1,3,-2), \quad v_4 = (0,1,-1).$$

Geben Sie Basen von folgenden Untervektorräumen an:

   a) $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} \cap \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$,

   b) $\operatorname{span}\{v_1\} + \operatorname{span}\{v_2, v_3\}$.

7. Seien $v_1, \ldots, v_n$ Elemente des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis von V.

   b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine **maximale linear unabhängige Menge** von Vektoren in V, d.h. $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig und für jeden Vektor $v \in V$ ist die Menge $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig.

   c) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bilden ein **minimales Erzeugendensystem**, d.h. es gilt $V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ und es gibt keine **echte** Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n\}$, die ein Erzeugendensystem von V ist.