Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

06.11.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 5

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 4** am Mittwoch, 14.11.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Seien $v_1, v_2 \in V$ zwei linear unabhängige Elemente eines Vektorraumes V sowie $w_1, w_2 \in V$ definiert durch $w_1 := v_1 + v_2$ und $w_2 := v_1 - v_2$. Zeigen Sie, dass w_1 und w_2 linear unabhängig sind und dass gilt
$$\operatorname{span}\{w_1, w_2\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}.$$
(**4 Punkte**)

2. Überprüfen Sie, ob folgende Elemente des Vektorraumes $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ linear unabhängig sind und begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $(x+1)^2, \quad x^2 + x, \quad 1,$

   b) $\sin(x - 3\pi), \quad \sin(x).$

(**2 + 2 Punkte**)

3. Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sowie die Teilmenge U durch
$$V := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 2\}, \qquad U := \{p \in V |\ \int_0^1 p(x)\,dx = 0\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

   b) Bestimmen Sie eine Basis von U. (*Hinweis:* Überführen Sie die Unterraumbedingung für U in eine äquivalente Bedingung an die Koeffizienten a, b, c des Polynomes $p \in V$.)

(**2+2 Punkte**)

4. Gegeben seien die beiden Vektoren v_1, v_2 des Vektorraumes $V = \mathbb{C}^2$ durch
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Untersuchen Sie, ob $\{v_1, v_2\}$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes V bilden.

   b) Untersuchen Sie, ob sie auch eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V bilden.

(**2 + 2 Punkte**)

5. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V sind linear unabhängig, falls kein Element v_i ein Vielfaches eines anderen Elementes v_j ist.

6. Untersuchen Sie, ob die beiden Vektoren v_1, v_2 des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $V = \mathbb{C}^2$ mit
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 3 + i \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 - 4i \\ 5 - 5i \end{pmatrix}.$$
linear unabhängig sind.

7. Überprüfen Sie, ob folgende Elemente des Vektorraumes $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ linear unabhängig sind und begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $x^2, \quad \sin(x)$,

   b) $1, \quad \sin^2(x), \quad \cos^2(x), \quad \cos(2x)$.

8. Sei $\quad U := \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\}$

   a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^4$ ist.

   b) Bestimmen Sie eine Basis von U und weisen Sie die Basiseigenschaften nach.