Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 29.10.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 4

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 4** am Mittwoch, 07.11.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. a) Seien U_1 und U_2 Untervektorräume des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Beweisen Sie, dass dann auch $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist.

   b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ zweier Untervektorräume U_1 und U_2 eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V im allgemeinen kein Untervektorraum von V ist.

   (**2+2 Punkte**)

2. Sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^2$ mit $U \neq \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass dann ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ existiert, so dass
$$U = \{\alpha v \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$
   (**4 Punkte**)

3. Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie für die folgenden Teilmengen $U \subset V$, ob es sich um einen Untervektorraum handelt oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $U := \{f \in V \mid f(0) + 2f(1) = 0\}$

   b) $U := \{f \in V \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \ f(x) \leq \alpha \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}$

   (**2 + 2 Punkte**)

4. Untersuchen Sie für die folgenden Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^4$, ob es sich um einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^4$ handelt oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort. Dabei bezeichnen x_1, x_2, x_3, x_4 die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^4$.

   a) $U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2 + x_3x_4 = 0\}$

   b) $U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, \ \ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

   (**2 + 2 Punkte**)

5. Zeigen Sie: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektoraumes V und ist auch die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V, so gilt $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

6. Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie für die folgenden Teilmengen $U \subset V$, ob es sich um einen Untervektorraum handelt oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $U := \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}$,

   b) $U := \{f \in V \mid f(0) = 1\}$.

7. Untersuchen Sie für die folgenden Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^4$, ob es sich um einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^4$ handelt oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort. Dabei bezeichnen x_1, x_2, x_3, x_4 die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^4$.

   a) $U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0\}$

   b) $U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$