Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 23.10.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 3

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Dienstag, 30.10.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und für ein beliebiges Element $x \in G$ bezeichne x' das inverse Element zu x. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   a) $(a \circ b)' = b' \circ a' \qquad \forall\, a, b \in G,$

   b) $(a')' = a \qquad \forall\, a \in G.$

   (**3+2 Punkte**)

2. Sei M die Menge der Punkte eines gleichseitigen Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C und S der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$. Die Elemente der Gruppe $(G, \circ)$ seien alle diejenigen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die geometrisch einer Drehung um den Punkt S mit einem Winkel φ oder einer Spiegelung an einer Geraden g durch den Punkt S entsprechen und bei denen für die Menge $f(M)$ der Bildpunkte von M gilt $f(M) = M$. Zu zwei Elementen $f, h \in G$ sei $f \circ h \in G$ definiert als die Hintereinanderausführung von f und h, d.h. als diejenige Abbildung $f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

   $$(f \circ h)(x) := f(\,h(x)\,) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

   a) Ermitteln Sie alle Elemente von G.

   b) Geben Sie die Verknüpfungstabelle von $(G, \circ)$ an.

   c) Ist die Gruppe $(G, \circ)$ abelsch ?

   (**2+3+1 Punkte**)

3. a) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem für z und w über dem Körper der komplexen Zahlen

   $$\begin{aligned} \frac{1}{i}z + (2+i)w &= 0 \\ 2z - (1-i)w &= 2. \end{aligned}$$

   b) Beschreiben Sie die Abbildung

   $$z \mapsto z' = \frac{i}{1+i}z,$$

   die jedem Punkt z der komplexen Zahlenebene einen Bildpunkt z' zuordnet, geometrisch.

   (**2 + 2 Punkte**)

4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und für ein beliebiges Element $a \in G$ bezeichne a' das inverse Element zu a. Ferner sei bekannt, dass gilt

   $$a = a' \qquad \forall\, a \in G.$$

   Beweisen Sie, dass dann $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

5. Sei M die Menge der Punkte eines Rechtecks mit den Eckpunkten A, B, C, D und S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Die Elemente der Gruppe $(G, \circ)$ seien alle diejenigen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die geometrisch einer Drehung um den Punkt S mit einem Winkel φ oder einer Spiegelung an einer Geraden g durch den Punkt S entsprechen und bei denen für die Menge $f(M)$ der Bildpunkte von M gilt $f(M) = M$. Zu zwei Elementen $f, h \in G$ sei $f \circ h \in G$ definiert als die Hintereinanderausführung von f und h, d.h. als diejenige Abbildung $f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(f \circ h)(x) := f(\,h(x)\,) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Es sei vorausgesetzt, dass das Rechteck kein Quadrat ist.

a) Ermitteln Sie alle Elemente von G.

b) Geben Sie die Verknüpfungstabelle von $(G, \circ)$ an.

c) Bestimmen Sie zu jedem Element $f \in G$ das inverse Element f'.

d) Weisen Sie das Assoziativgesetz nach.

6. a) Sei $z = 5 - 3i$. Bestimmen Sie $\bar{z}$, $|z|$, $\arg(z)$ und $\frac{1}{z}$.

b) Schreiben Sie die folgenden Zahlen z_k, $k = 1, 2, 3$, in der Form $x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = \frac{1+i}{7-i}, \qquad z_2 = (9+6i)^4, \qquad z_3 = \left|\frac{2-6i}{3+8i}\right|.$$