Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

16.10.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 2

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 24.10.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Es seien α, β, γ drei reelle Zahlen, von denen mindestens eine von 0 verschieden ist und für die gilt $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Zeigen Sie, dass für den Winkel zwischen den Vektoren $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ und $y = (\gamma, \alpha, \beta)$ gilt: $\sphericalangle(x, y) = \frac{2\pi}{3}$. (**4 Punkte**)

2. Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$$(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle\, v - \langle v, w\rangle\, u.$$
(**3 Punkte**)

3. Sei E die Ebene, die von den Vektoren $v = (1, 1, 1)$ und $w = (2, 1, 3)$ aufgespannt wird und den Punkt $p = (3, 5, 1)$ enthält.
   a) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle(v, w)$.
   b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E und ermitteln Sie den Abstand des Punktes $q = (0, 1, 0)$ zu E sowie den Fußpunkt $f \in E$ des Lotes durch q senkrecht zu E.
   c) Sei $g = \{r + tu \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch $r = (3, 2, 0)$ mit dem Richtungsvektor $u = (-1, 2, 4)$. Berechnen Sie den Schnittpunkt s der Geraden g mit der Ebene E.

   (**2 + 3 + 2 Punkte**)

4. Gegeben seien drei Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$ und $x + y + z = 0$. Zeigen Sie, dass sich daraus die folgende Winkelbeziehung ergibt
$$\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(x, z) = \sphericalangle(y, z) = \frac{2\pi}{3}.$$
Tipp: Leiten Sie drei Gleichungen für die drei Zahlen $a = \sphericalangle(x, y)$, $b = \sphericalangle(x, z)$ und $c = \sphericalangle(y, z)$ her.

5. a) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass für beliebige Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ im allgemeinen gilt
$$(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w).$$
   b) Geben Sie eine möglichst allgemeine Zusatzbedingung für u, v, w an, unter der in obiger Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

6. Seien E_k, $k = 1, 2$, mit $E_k := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ \langle x - p_k, n_k\rangle = 0\}$ zwei Ebenen in Hessescher Normalform, wobei $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$ und $n_1 \times n_2 \neq 0$. Weiterhin existiere ein Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, so dass $\langle p - p_1, n_1\rangle = \langle p - p_2, n_2\rangle = 0$. Zeigen Sie, dass dann
$$E_1 \cap E_2 = \{p + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{wobei} \qquad v = n_1 \times n_2.$$
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jeder Punkt $x - p \in \mathbb{R}^3$ dargestellt werden kann als $\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma v$ mit geeigneten Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.