Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck 10.10.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra für FNW und FHW"
Wintersemester 2012/13 - Blatt 1

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 4** am Mittwoch, 17.10.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Untersuchen Sie, ob die drei Punkte $P_1 = (3, 0, 4)$, $P_2 = (1, 1, 1)$ und $P_3 = (-1, 2, -2)$ auf einer Geraden liegen. (**3 Punkte**)

2. Zu gegebenen Vektoren $p, v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ seien g und $\tilde{g}$ die Geraden
$$g = \{p + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad \tilde{g} = \{p + tw \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$
Beweisen Sie, dass $g = \tilde{g}$ gilt, falls es eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$ gibt mit $w = \alpha v$. (**4 Punkte**)

3. Zu gegebenen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ sei g die Menge
$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}.$$
Zeigen Sie, dass g eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ ist im Sinne der Definition 1.2 aus der Vorlesung. (**4 Punkte**)

4. Zeigen Sie für das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und die Euklidische Norm $\| \cdot \|$ im $\mathbb{R}^n$ die "Polarisierungsgleichung"
$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\Big) \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$
(**3 Punkte**)

5. Bestimmen Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine Darstellung in Koordinatenform für diejenige Gerade g in $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(10, 5)$ und $(1, 2)$ verläuft.

6. Zu gegebenen Vektoren $p, q, v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ seien g und $\tilde{g}$ die Geraden
$$g = \{p + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad \tilde{g} = \{q + tv \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$
Beweisen Sie, dass $g = \tilde{g}$ gilt, falls $q \in g$.

7. Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

8. Zu gegebenen Vektoren $p_1, p_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $v_1, v_2 \neq 0$ seien g_1 und g_2 die Geraden
$$g_1 = \{p_1 + tv_1 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad g_2 = \{p_2 + tv_2 \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$
Beweisen Sie, dass es genau einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ mit $q \in g_1 \cap g_2$ gibt unter der Voraussetzung, dass keine reelle Zahl α existiert mit $v_2 = \alpha v_1$.