Musterlösungen Blatt 13

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Nullstellen sind : $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$:

$$(A - 1 \cdot E)\,x = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2z_1 \\ +2z_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = t$; Gl. 2: $-4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Gl. 1: $x_1 + 0 + t = 0 \Rightarrow x_1 = -t$

$\Rightarrow$ Eigenraum zu λ_1: $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ geometr. Vielfachheit $g(\lambda_1) = 1$

$\text{Basis}(E_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

da $\lambda_1 = 1$ einfache Nullstelle, ist algebraische Vielfachheit

$a(\lambda_1) = 1$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$:

$$(A - \lambda_2 E \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -z_1 \\ +2z_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ x_1, x_3 sind abhängige Variablen

$x_2 = t$ ist freie Variable

Gl. 2: $-x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_3 = 0}$

Gl. 1: $x_1 + 2t + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -2t}$

$\Rightarrow$ Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$: $\quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ Basis $(E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, geom. Vielfachheit $g(\lambda_2) = 1$

λ_2 ist einfache Nullstelle $\Rightarrow$ algebr. Vielfachheit $a(\lambda_2) = 1$

Eigenraum zu $\lambda_3 = 3$:

$$(A - 3 \cdot E \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2 \cdot z_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +z_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{x_3 = t}$ freie Variable

Gl. 2: $2x_2 + 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = -t}$

Gl. 1: $x_1 + (-t) + t = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 0}$

$\Rightarrow$ Eigenraum zu $\lambda_3 = 3$: $\quad E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ Basis$(E_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, geometr. Vielfachheit $g(\lambda_3) = 1$

da $\lambda_3 = 3$ <u>einfache</u> Nullstelle, gilt: algebr. Vielf. $a(\lambda_3) = 1$

· <u>Diagonalisierbarkeit von A über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:</u>

$\sim$ ... ist genau dann gegeben, wenn $\forall$ Eigenwerte λ_i von A gilt: $\quad a(\lambda_i) = g(\lambda_i)$

$\sim$ hier ist $\quad a(\lambda_i) = g(\lambda_i) = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow$ A ist <u>diagonalisierbar über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$</u>