Blatt 11 – Lösungen zum Ergebnisvergleich

1 a) $\sphericalangle(N_1, N_2) \approx 10{,}89°$

b) (E_1) : $$\left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: n_1} = 0$$

(E_2) : $$\left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{56}} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{n_2} = 0$$

Abstand von q zu E_1 $= \underline{\underline{\sqrt{6}}}$

c) Gleichungssystem für $x \in E_1 \cap E_2$: $Ax = b$ mit

- $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right)$
- Lösungsmenge: $x = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

dies entspricht der Geradengl.

$$x = p + t \cdot a$$

2 a) kein UVR

b) ist UVR

3) Basis von U : $\{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$

4) nein, denn entsprechendes Gleichungssystem $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ für $\alpha_{1,2}$ hat <u>keine</u> Lösung

5) zunächst ermittelt man :

$\text{Basis}(U_1) = \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow \dim(U_1) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{U_1 = \mathbb{R}^3}}$

$\text{Basis}(U_2) = \{v_4, v_5\}$

$\Rightarrow$ 5a) $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^3 \cap U_2 = U_2$

$\Rightarrow$ Basis von $U_1 \cap U_2 = \underline{\underline{\{v_4, v_5\}}}$

5b) $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3 + U_2 = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \underline{\underline{3}}$

7a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) • da $f: V \to V$, ist "f injektiv" g.d.w. "f surjektiv"

• f ist injektiv g.d.w. $\ker f = \{0\}$ g.d.w. $\ker A = \{0\}$

g.d.w. $rg(A) = 3$

• man ermittelt $rg(A) = 3$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ ist injektiv}}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ ist surjektiv}}}$

8) $\ker f = \left\{ x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \text{Basis}(\ker f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow \dim(\ker f) = \underline{\underline{1}}$

$\Rightarrow rg(f) = n - \dim(\ker f) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$

9) $rg(A) = 3$, $rg(B) = 2$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 13 & 7 & 30 \\ 9 & -8 & -82 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 13 & -9 \\ 33 & 11 & -20 & 14 \\ 111 & 36 & -73 & 51 \\ 30 & 13 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) • <u>tausche</u>: Sp. 1 $\leftrightarrow$ Sp. 3, dann Zei 1 $\leftrightarrow$ Zei 3,

dann Zei 1 $\leftrightarrow$ Zei 2

$$\Rightarrow A \hat{=} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (A \text{ u. } \tilde{A} \text{ sind Rang-gleich})$$

man ermittelt:

$$A \hat{=} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha - 1} \end{pmatrix}$$

hieraus folgt $\quad rg(A) = \begin{cases} 3, & \text{falls } \alpha - 1 \neq 0 \\ 2, & \alpha = 1 \end{cases}$

• <u>also</u>: falls $\alpha \neq 1$, so gilt $rg(A) = 3$;

$\Rightarrow$ Gl'system $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung für jedes $b \in \mathbb{R}^3$

// a) gezeigt

10b) $Lös(A,b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

11) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

12) $Lös(A,b) = \left\{ x = \begin{pmatrix} 7/15 \\ 16/5 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$