Musterlösungen Blatt 8

1a) $f(v) = a \times v = \begin{pmatrix} a_2 v_3 - a_3 v_2 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ a_1 v_2 - a_2 v_1 \end{pmatrix}$; ges: A mit $f(v) = Av$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

1b) $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 - 2i z_2 \\ i z_1 + 2 z_2 \end{pmatrix}$; ges A mit $f(z) = Az$

$$f(\underbrace{1,0}_{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad f(\underbrace{0,1}_{e_2}) = \begin{pmatrix} -2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

2) $\underline{A \in M(3 \times 3; \mathbb{R}),\ B \in M(3 \times 4; \mathbb{R}):}$

$\Rightarrow$ • $\underline{B \cdot A \text{ nicht def.}}$, da Sp.anz.$(B) = 4 \neq$ Zeilanz.$(A) = 3$

• $(A+B)$ nicht def., da Format$(A) = 3\times 3 \neq$ Format$(B) = (3 \times 4)$

$\Rightarrow \underline{(A+B)\cdot C \text{ nicht def.}}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{bmatrix}, \quad DC = \underline{\underline{-57}}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad BCD = \begin{bmatrix} -7 & 14 & 0 & 56 \\ -7 & 14 & 0 & 56 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{bmatrix}$$

B·D nicht def., da Sp'anz. $(B) = 4 \neq$ Zei'anz. $(D) = 1$

3) $F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(p) := (p(-1), p(0), p(1))$

a) z.z.: F ist Isomorphismus

Bew: • sei $p \in \ker F$ und $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} p(-1) = & a_2 - a_1 + a_0 = 0 \quad (1) \\ p(0) = & a_0 = 0 \quad (2) \\ p(1) = & a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad (3) \end{array}$$

$(2) \Rightarrow \boxed{a_0 = 0} \xRightarrow{(1)+(3)} 2a_2 + \underbrace{2a_0}_{=0} = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$

$\xRightarrow{(3)} a_1 = -a_2 - a_0 = 0$

also $a_2 = a_1 = a_0 = 0 \Rightarrow p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ker F = \{0\} \Rightarrow F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ ist injektiv

• bekanntlich ist $\{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$ Basis von $\mathbb{P}_2$;

es gilt $F(p_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F(p_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F(p_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Annahme: $\exists a_{1,2,0} \in \mathbb{R}: \quad a_0 F(p_1) + a_1 F(p_2) + a_2 F(p_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für a_0, a_1, a_2 gilt das obige Gleichungssystem (1), (2), (3)

$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$\Rightarrow \{F(p_1), F(p_2), F(p_3)\}$ sind linear unabhängig

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\operatorname{span}\{F(p_1), F(p_2), F(p_3)\}) = 3$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3 \Rightarrow F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}_3$ ist surjektiv

• somit ist F linear u. bijektiv $\Rightarrow$ F ist Isomorphismus //

3b) $\mathcal{A} = \{\underbrace{1}_{p_1}, \underbrace{x}_{p_2}, \underbrace{x^2}_{p_3}\}$ ist Basis von $\mathbb{P}_2$

$\phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ sei zugehöriger Koord' isomorph.

d.h. $\phi_{\mathcal{A}}(\alpha) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \quad \forall\, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$

$= p \quad$ mit $\quad p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(\alpha)}} = F(\underbrace{\phi_{\mathcal{A}}(\alpha)}_{=p}) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}}}$$

- Bestimmung der Matrix A mit: $f(\alpha) = A\alpha$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$