Musterlösungen Blatt 7

1.) <u>Annahme:</u> $\exists$ lineare Abb. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(\underbrace{1,2,3}_{=:v_1}) = (1,1), \quad F(\underbrace{-2,3,1}_{=:v_2}) = (1,0), \quad F(\underbrace{4,1,5}_{=:v_3}) = (0,1)$$

- wir bestimmen eine Basis von $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

  $\sim$ v_1, v_2 sind lin. unabh.

  $\sim$ wir prüfen, ob $v_3 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$

$$\iff \exists\, \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}: \quad v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

$$\iff \begin{cases} 4 = \alpha_1 + (-2)\alpha_2 & (1) \\ 1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & (2) \\ 5 = 3\alpha_1 + \alpha_2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \iff \alpha_1 = 4 + 2\alpha_2$$

$$\Rightarrow (2) \iff 1 = 8 + 4\alpha_2 + 3\alpha_2 \iff -7 = 7\alpha_2$$
$$\iff \alpha_2 = -1$$

also: (1) u. (2) $\iff$ $\boxed{\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1}$

$$\Rightarrow (3) \iff 5 \overset{?}{=} 6 + (-1) \quad \text{w.A.}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_3 = 2v_1 - v_2} \qquad (4)$$

und $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$

- $\Rightarrow$ F ist eindeutig festgelegt durch $\{F(v_1), F(v_2)\}$
- für $F(v_3)$ gilt:

$$\underline{\underline{(0,1)}} = F(v_3) \overset{(4)}{=} 2F(v_1) - F(v_2) = 2(1,1) - (1,0) = \underline{\underline{(1,2)}}$$

Wdspr. $\Rightarrow$ Ann. falsch. //

2a) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y,z) = (xy, x+y)$

$$F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha^2 xy, \alpha x + \alpha y) \stackrel{?}{=} \alpha F(x,y,z) = (\alpha xy, \alpha x + \alpha y)$$

ist i.a. nicht erfüllt, denn z.B. für $x=y=1$, $\alpha = 10$

ergibt sich: $(100, 20) \stackrel{?}{=} (10, 20)$ falsche Auss.

$\Rightarrow$ F ist nicht linear

2b) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = (3x+2y, 4x+y)$

- wir prüfen: $F(x_1+x_2, y_1+y_2) = F(x_1,y_1) + F(x_2,y_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2) \\ 4(x_1+x_2) + (y_1+y_2) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3x_1 + 2y_1 \\ 4x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 + 2y_2 \\ 4x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

ist erfüllt $\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

- wir prüfen: $F(\alpha x, \alpha y) = \alpha F(x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha x + 2\alpha y \\ 4\alpha x + \alpha y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \alpha \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + y \end{pmatrix}$$

ist erfüllt $\forall\, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ F ist eine lineare Abb.

- Injektivität von F: sei $(x,y) \in \ker F$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 & (1) \\ 4x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Leftrightarrow y = -4x \\ \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 3x - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = y = 0$$

$\Rightarrow \ker F = \{0\}$, d.h. F ist injektiv

- Surjektivität von F:

da $F: V \to V$ mit $V = \mathbb{R}^2$, folgt die Surjektivität von F aus der Injektivität von F

d.h. F ist surjektiv

- F ist ein Isomorphismus, da F linear, injektiv und surjektiv ist

3.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(v) = 2\langle v, a\rangle a - v$, $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = 1$

- wir prüfen: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(v_1+v_2) &= 2\langle v_1+v_2, a\rangle a - (v_1+v_2) \\ &= 2(\langle v_1, a\rangle + \langle v_2, a\rangle) a - v_1 - v_2 \\ &= (2\langle v_1, a\rangle a - v_1) + (2\langle v_2, a\rangle a - v_2) \\ &= f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

Kriterium ist erfüllt

- wir prüfen: $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= 2\langle \alpha v, a\rangle a - (\alpha v) \\ &= 2\alpha\langle v, a\rangle a - \alpha v = \alpha(2\langle v, a\rangle a - v) \\ &= \alpha f(v) \end{aligned}$$

Kriterium ist erfüllt

$\Rightarrow$ f ist linear

- Bestimmung von ker f: sei $v \in \ker f$

$$\Leftrightarrow \quad f(v) = \underbrace{2\langle v, a\rangle a - v}_{} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v = 2\langle v, a\rangle a \quad \Leftrightarrow \begin{cases} v = \lambda a, \ \lambda \in \mathbb{R} \ \text{und} \\ \lambda a = 2\langle \lambda a, a\rangle a \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda a = 2\lambda \underbrace{\langle a, a\rangle}_{=\|a\|^2 = 1} a \quad \Leftrightarrow \lambda a = 2\lambda a \Leftrightarrow \lambda a = 0$$

Bl. 7

-4-

$$\lambda a = 0 \overset{\|a\|=1}{\Longleftrightarrow} \lambda = 0 \Longleftrightarrow v = \lambda a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ker f = \{0\}}$$

- <u>Bestimmung von $\operatorname{Im} f$:</u>

nach Dimensionssatz gilt: $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

$$\Rightarrow 2 = 0 + \dim(\operatorname{Im} f) \quad \text{also} \quad \boxed{\dim(\operatorname{Im} f) = 2}$$

da $\operatorname{Im} f$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist, folgt

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$$

4) <u>$F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, $F(p)(x) := x\,p(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$</u>

a) <u>z.z.: F ist linear</u>

- seien $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl|c} F(p_1)(x) & = & x\,p_1(x) & + \\ F(p_2)(x) & = & x\,p_2(x) & + \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow F(p_1)(x) + F(p_2)(x) = x\,(p_1(x) + p_2(x))$$

$$\Rightarrow (F(p_1) + F(p_2))(x) = \underbrace{x\,(p_1+p_2)(x)}$$

$$= F(p_1+p_2)(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(p_1) + F(p_2) = F(p_1+p_2)}$$

- sei $p \in \mathbb{P}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(\alpha p)(x) = x(\alpha p)(x) = \alpha\,(x\,p(x)) = \alpha F(p)(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(\alpha p) = \alpha F(p)} \quad //$$

4b) <u>Bestimmung von ker F, Im F</u>

- sei $p \in \ker F$, d.h.

$$F(p)(x) = x \cdot p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- da Polynome stetig sind, folgt

$$p(0) = \lim_{x \to 0} \underbrace{p(x)}_{=0} = 0$$

also gilt $p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\ker F = \{0\}}$

- $\{p_1, p_2, p_3\}$ mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ ist Basis von $\mathbb{P}_2$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} F = \operatorname{span}\{F(p_1), F(p_2), F(p_3)\}$$
$$= \underline{\underline{\operatorname{span}\{x, x^2, x^3\}}}$$

<u>Bem</u> nach Dimensionssatz gilt

$$\dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\underbrace{\mathbb{P}_2}_{=V}) - \dim(\ker F)$$
$$= 3 - 0 = \underline{\underline{3}}$$

also ist $\{x, x^2, x^3\}$ eine <u>Basi von Im F</u>