Musterlösungen Blatt 6

1.) <u>geg.:</u> $u, v \in \mathbb{R}^3$ lin. unabh. $w := \frac{1}{\|u \times v\|}(u \times v)$

- <u>Annahme:</u> $w \in \operatorname{span}\{u, v\}$ (1)

  $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad w = \alpha u + \beta v$ (2)

- es gilt $\|w\| = \frac{1}{\|u \times v\|} \|u \times v\| = 1$ und $\langle u, w\rangle = 0$, $\langle v, w \rangle = 0$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \langle w, w\rangle = \alpha \underbrace{\langle u, w\rangle}_{=0} + \beta \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \|w\|^2 = 1 = 0$ <u>Wdspr.</u>! $\Rightarrow$ <u>Ann. ist falsch</u>

- $\Rightarrow \{u, v, w\}$ sind lin. unabh.
- da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, bilden $\{u, v, w\}$ somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ //

2a) <u>z.z.: $\dim(\mathbb{R}\text{-VR } \mathbb{C}^2) = 4$</u>

- sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$

- <u>$\{v_1, \dots, v_4\} \subset \mathbb{C}^2$ sind linear unabh.</u>

  <u>Bew:</u> sei $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$

  wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_4 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 \\ \alpha_3 + i\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ //

- <u>$\{v_1, \dots, v_4\}$ bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}^2$</u>

  <u>Bew:</u> sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $x_{1,2}, y_{1,2} \in \mathbb{R}$

dann gilt: $z = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$

$= x_1 v_1 + y_1 v_2 + x_2 v_3 + y_2 v_4$ //

- damit haben wir gezeigt: $\{v_1, .., v_4\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{C}^2$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\dim(\mathbb{R}\text{-VR } \mathbb{C}^2) = 4}}$ //

2b) Vor: • $U_{1,2}$ sei Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$
• $\dim U_i \geq 2$, $i = 1,2$

z.z.: $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$

Bew (indirekt): Ann.: $U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\Rightarrow$ (nach Dimensionsformel)

$$\underbrace{\dim(U_1)}_{\geq 2} + \underbrace{\dim(U_2)}_{\geq 2} = \underbrace{\dim(U_1 + U_2)}_{\leq 3} + \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{= 0}$$

$\Rightarrow$ linke Seite ≥ 4
rechte Seite ≤ 3 } Wdspr.! $\Rightarrow$ Ann. falsch //

③ geg: $U_1 = \text{span}\{(1,3,1), (1,0,-1), (-1,3,3)\}$, $U_2 = \text{span}\{(1,3,2), (-2,-6,-4)\}$

Basis u. dim von U_1:

- sei $v_1 = (1,3,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$
- dann gilt: $v_2 \notin \text{span}\{v_1\}$

denn sonst $\exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R}$: $v_2 = (1,0,-1) = \alpha_1 v_1 = (\alpha_1, 3\alpha_1, \alpha_1)$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_1 = -1$ Wdspr

$\Rightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ sind lin. unabh. (1)

- Annahme: $v_3 = (-1,3,3) \in \text{span}\{v_1, v_2\}$ (2)

$\Leftrightarrow \exists \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}: \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$

2. Komp.: $3 = 3\alpha_1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 1}$

$\Rightarrow$ 1. Komp.: $-1 = 1 + \alpha_2 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -2}$

3. Komp.: $3 = \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - (-2) = 3$ w.A.

<u>also</u>: (2) ist wahr

$\Rightarrow U_1 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ und <u>$\{v_1, v_2\}$ ist Basis von U_1</u>

$\Rightarrow$ <u>$\dim(U_1) = 2$</u>

<u>Basis u. dim von U_2:</u>

- sei $v_4 = (1,3,2)$, $v_5 = (-2,-6,-4)$
- dann gilt $v_5 = (-2)v_4 \in \operatorname{span}\{v_4\}$

$\Rightarrow U_2 = \operatorname{span}\{v_4\}$ u. <u>$\{v_4\}$ ist Basis von U_2</u>

$\Rightarrow$ <u>$\dim(U_2) = 1$</u>

<u>Basis u. dim von $U_1 \cap U_2$:</u>

- sei $v \in U_1 \cap U_2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \cap \operatorname{span}\{v_4\}$

$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}: \quad v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ — " — : $\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \alpha_4 \\ 3\alpha_1 &= 3\alpha_4 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2\alpha_4 \end{aligned}$

$\Leftrightarrow$ <u>$\alpha_4 = \alpha_1$</u> und $\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2\alpha_1 \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_2 &= \alpha_1 \end{aligned}}$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$

- $\underline{\text{also:}}$ $v \in U_1 \cap U_2 \iff v = 0$, d.h. $\underline{\underline{U_1 \cap U_2 = \{0\}}}$

$\Rightarrow \underline{\dim(U_1 \cap U_2) = 0}$ (es gibt keine Basis)

<u>Basis u. dim von $U_1 + U_2$:</u>

- $U_1 + U_2 = \mathrm{span}\{v_1, v_2\} + \mathrm{span}\{v_4\}$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_4\} \qquad (3)$$

- nach Dimensionssatz gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$
$$= 2 + 1 - 0 = \underline{\underline{3}}$$

- wegen (3) und $\dim(U_1 + U_2) = 3$, müssen $\{v_1, v_2, v_4\}$ lin. unabh. sein

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$ bilden eine Basis von $U_1 + U_2$