Musterlösungen Blatt 5

(1) $v_1, v_2 \in V$ lin. unabh.

$$w_1 = v_1 + v_2 \qquad w_2 = v_1 - v_2$$

• z.z.: w_1, w_2 sind lin. unabh.

Sei $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(v_1+v_2) + \alpha_2(v_1-v_2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)v_1 + (\alpha_1-\alpha_2)v_2 = 0$

da v_1, v_2 lin. unabh., folgt daraus: $\begin{array}{l|l} \alpha_1+\alpha_2 = 0 & + \\ \alpha_1-\alpha_2 = 0 & + \\ \hline \end{array}$

$\Rightarrow 2\alpha_1 = 0$

also $\boxed{\alpha_1 = 0}$ u. nach Einsetzen in die 1. Gl. für $\alpha_{1/2}$ folgt $\boxed{\alpha_2 = 0}$

da $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, folgt dass $w_{1/2}$ lin. unabh. sind ∎

• z.z.: $\text{span}\{w_1, w_2\} = \text{span}\{v_1, v_2\}$

~ sei $U := \text{span}\{v_1, v_2\}$, dann ist U UVR von V

aus $v_1, v_2 \in U$ folgt $w_1 = v_1 + v_2 \in U$
und $w_2 = v_1 - v_2 \in U$

~ aus $w_{1/2} \in U$ folgt $\boxed{\text{span}\{w_1, w_2\} \subset U}$ (1)

~ wir zeigen: $\boxed{v \in U \Rightarrow v \in \text{span}\{w_1, w_2\}}$ (2)

Bew.: • $v \in U \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ mit $\alpha_{1/2} \in \mathbb{K}$

• finde $\beta_{1/2} \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \underline{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2} = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 = \underline{(\beta_1+\beta_2)v_1 + (\beta_1-\beta_2)v_2}$$

$\Leftrightarrow (\beta_1+\beta_2-\alpha_1)v_1 + (\beta_1-\beta_2-\alpha_2)v_2 = 0$

$\overset{v_1, v_2 \text{ lin. unabh.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} \beta_1+\beta_2 = \alpha_1 \\ \beta_1-\beta_2 = \alpha_2 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) \\ \beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2) \end{array}}$

- aus $v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$ folgt $v \in \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$
  $\Rightarrow$ (2) ◻

$\sim$ aus (2) folgt : $U \subset \operatorname{span}\{w_1, w_2\} \xRightarrow{(1)} U = \operatorname{span}\{w_1, w_2\}$ ◼

(2) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

a) $f_1(x) = (x+1)^2, \quad f_2(x) = x^2 + x, \quad f_3(x) = 1$

- $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$
- sei $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_V$

$\Leftrightarrow \alpha_1(x^2+2x+1) + \alpha_2(x^2+x) + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2(\alpha_1 + \alpha_2) + x(2\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

für $x = 0 \Rightarrow$: $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ (1)

$x = 1 \xRightarrow{(1)} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ (2)

$x = -1 \xRightarrow{(1)} -\alpha_1 = 0$ (3) $\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

$\xRightarrow{(1)} \boxed{\alpha_3 = 0}$

$\alpha_1 = 0 \xRightarrow{(2)} \alpha_2 = 0$

- aus $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ folgt : $f_{1,2,3}$ sind lin. unabh.

b) $f_1(x) = \sin(x - 3\pi), \quad f_2(x) = \sin(x)$

- nach Additionstheorem gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \sin(x - 3\pi) = \sin(x) \underbrace{\cos(3\pi)}_{=-1} - \cos(x) \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0}$$

$$= -\sin(x) = -f_2(x)$$

$\Rightarrow f_1 = -f_2 \Rightarrow$ $f_{1,2}$ sind lin. abh.

Bl.5
-3-

3. $V := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist Polynom vom Grad} \leq 2\}$

$U := \{p \in V \mid \int_0^1 p(x)\,dx = 0\}$

a) <u>z.z.:</u> <u>U ist UVR von V</u>

<u>Bew.:</u> • sei $p \in U$ und $q \in U$

$\Rightarrow p, q \in V \Rightarrow p + q \in V$

und $\left.\begin{array}{l} \int_0^1 p(x)\,dx = 0 \\ \int_0^1 q(x)\,dx = 0 \end{array}\right\} + \Rightarrow \int_0^1 \underbrace{\left(p(x) + q(x)\right)}_{=(p+q)(x)} dx = 0$

$\Rightarrow p + q \in U$

• sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in U$

$\Rightarrow p \in V \Longrightarrow \alpha p \in V$

und $\int_0^1 p(x)\,dx = 0 \quad | \cdot \alpha \quad \Rightarrow \int_0^1 \underbrace{\left(\alpha p(x)\right)}_{=(\alpha p)(x)} dx = 0$

$\Longrightarrow \alpha p \in U$ $\square$

b) <u>bestimme Basis von U</u>

• $\forall p \in V \;\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{p(x) = ax^2 + bx + c}$

• die <u>Unterraum-Bedingung</u> $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$ (B)

ist äquivalent zu

$a\int_0^1 x^2\,dx + b\int_0^1 x\,dx + c\int_0^1 1\,dx = 0$

$\Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{3} + b \cdot \frac{1}{2} + c = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{c = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b}$ (B')

- jedes Polynom $p \in V$ ist eineindeutig verknüpft mit dem Koeffizienten-Vektor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
- um (B') zu erfüllen, kann man $a,b \in \mathbb{R}$ frei wählen u. bestimmt c aus (B')
- der Unterraum der Koeffizienten-Vektoren (a,b,c), die (B') erfüllen, hat also die Basis

$$\left\{ (1, 0, -\tfrac{1}{3}), (0, 1, -\tfrac{1}{2}) \right\}$$

- demzufolge ist $\{p_1, p_2\}$ mit

$$p_1(x) = x^2 - \tfrac{1}{3} \qquad p_2(x) = x - \tfrac{1}{2}$$

eine Basis von U

(4) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \mathbb{C}^2$

a) <u>Ist $\{v_1, v_2\}$ Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes V?</u>

- sei $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ beliebig vorgegeben mit $z_{1/2} \in \mathbb{C}$
- <u>zu prüfen:</u> $\exists\, \alpha_{1/2} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\left.\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \alpha_1 + i\,\alpha_2 &=& z_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 &=& z_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad (1+i)\,\alpha_2 = z_1 + z_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_2 = \frac{1}{1+i}(z_1 + z_2)} \quad (2)$$

$$\overset{\text{2.Gl.}}{\Longrightarrow} \quad \alpha_1 = \alpha_2 - z_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{1+i} z_1 + \left(\frac{1}{1+i} - 1\right) z_2} \quad (3)$$

die Probe zeigt, dass diese $\alpha_{1/2}$ (1) erfüllen

- damit haben wir gezeigt: $\mathbb{C}^2 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$
- <u>zu prüfen:</u> $\{v_1, v_2\}$ lin. unabh.

  ~ sei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$ mit $\alpha_{1/2} \in \mathbb{C}$

  ~ $\Rightarrow$ es gilt (1) mit $z_1 = z_2 = 0 \in \mathbb{C}$

  $\overset{(2),(3)}{\Rightarrow}$ $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = 0$

  d.h. v_1, v_2 sind lin. unabh.

$\Rightarrow$ <u>$\{v_1, v_2\}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}$-VR $V = \mathbb{C}^2$</u>

b) <u>Ist $\{v_1, v_2\}$ auch Basis des $\mathbb{R}$-VR $V = \mathbb{C}^2$?</u>

- <u>zu prüfen:</u> $\exists\, \alpha_{1/2} \in \mathbb{R}$: $z = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

  $\mid \forall\, z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

- zu geg. $z_{1/2} \in \mathbb{C}$ gilt also (1)

  $\Rightarrow$ $\alpha_{1/2}$ müssen (2), (3) erfüllen

- für den Fall $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ ergibt sich:

  $\alpha_2 = \frac{1}{1+i}$ d.h. $\alpha_2 \notin \mathbb{R}$

- also gibt es <u>keine</u> $\alpha_{1/2} \in \mathbb{R}$, so dass

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Rightarrow$ <u>$\{v_1, v_2\}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}$-VR $V = \mathbb{C}^2$</u>