Musterlösungen Blatt 4

1a) <u>Vor</u>: $U_{1,2}$ seien UVR des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V

<u>z.z</u>: $U_1 \cap U_2$ ist UVR von V

<u>Bew</u>: (1.) <u>wir zeigen: $x,y \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow x+y \in U_1 \cap U_2$</u>

$$\left.\begin{array}{l} x,y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x,y \in U_1 \xrightarrow{U_1 \text{ UVR}} x+y \in U_1 \\ \qquad\qquad \xrightarrow{\text{und}} x,y \in U_2 \xrightarrow{U_2 \text{ UVR}} x+y \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in U_1 \cap U_2$$

(2.) <u>wir zeigen: $x \in U_1 \cap U_2$, $\alpha \in \mathbb{K} \Longrightarrow \alpha x \in U_1 \cap U_2$</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow x \in U_1 \xrightarrow{U_1 \text{ UVR}} \alpha x \in U_1 \\ \qquad\qquad \xrightarrow{\text{und}} x \in U_2 \xrightarrow{U_2 \text{ UVR}} \alpha x \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x \in U_1 \cap U_2$$

$\blacksquare$

1b) <u>Gegenbeispiel im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$</u>

- $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ ist UVR von $V = \mathbb{R}^2$

  $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ — " —

$\Rightarrow U_1 \cup U_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0$ <u>oder</u> $x_2 = 0\}$

- sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \Longrightarrow x \in U_1 \cup U_2$

  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2 \Longrightarrow y \in U_1 \cup U_2$

<u>aber</u> $x+y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1$ und $x+y \notin U_2$

$\Rightarrow x+y \notin U_1 \cup U_2$, obwohl $x,y \in U_1 \cup U_2$

$\Rightarrow U_1 \cup U_2$ ist <u>kein</u> UVR von V $\blacksquare$

2.) <u>Vor</u>: U ist UVR von $V=\mathbb{R}^2$ <u>und</u> $U \neq \mathbb{R}^2$

<u>z.z.</u>: $\exists\, v \in \mathbb{R}^2 : \quad \boxed{U = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}} \qquad (*)$

<u>Bew</u>: <u>1. Fall</u>: $U = \{0\} \Rightarrow$ es gilt $(*)$ mit $v = \binom{0}{0}$

<u>2. Fall</u>: $\exists$ Vektor $v \neq 0$ mit $v \in U$

- sei $\boxed{W := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}}$ (mit diesem v)
- sei $x \in W \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : x = \alpha v$

aus $v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt (da U ein UVR) $x = \alpha v \in U$

<u>also</u>: für jedes $x \in W$ gilt $x \in U \Rightarrow \boxed{W \subset U}$ (1)

- <u>Annahme</u> $W \neq U \xRightarrow{(1)} \exists\, u_0 \in U \setminus W$

~ also: $u_0 \in U$, $v \in U$ <u>und</u> es gibt <u>kein</u> $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $u_0 = \alpha v$

~ $\Rightarrow u_0, v$ sind <u>nicht</u> parallel und spannen eine Ebene auf, die durch $(0,0)$ geht

~ diese Ebene muß zwangsläufig der $\mathbb{R}^2$ sein

$\Rightarrow$ <u>jeder Punkt</u> $x \in E = \mathbb{R}^2$ hat die <u>Parameterdarstellung</u>

$$x = 0 + \alpha v + \beta u_0 \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

~ $v, u_0 \in U \xRightarrow{U \text{ ist UVR}} \left.\begin{array}{l} \alpha v \in U \\ \text{und } \beta u_0 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow x = \alpha v + \beta u_0 \in U$

<u>also</u>: für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $x \in U$

$\Rightarrow U = \mathbb{R}^2$ Widerspruch zu $U \neq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Annahme ist falsch. $\Rightarrow W = U \Rightarrow (*)$ gilt ∎

Bl. 4

-3- 3a) $U := \{ f \in V \mid \underbrace{f(0) + 2f(1) = 0}_{\text{Bedingung (B)}} \}$ wobei $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

- seien $f, g \in U$

$\overset{(B)}{\Longrightarrow}$ $f(0) + 2f(1) = 0$

und $g(0) + 2g(1) = 0$

$\overset{\text{addieren}}{\Longrightarrow} \left(\underbrace{f(0) + g(0)}\right) + 2\left(f(1) + g(1)\right) = 0$

$\Rightarrow (f+g)(0) + 2(f+g)(1) = 0$

$\overset{(B)}{\Longrightarrow} f + g \in U$

- sei $f \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\overset{(B)}{\Longrightarrow} f(0) + 2f(1) = 0 \mid \cdot \alpha \implies \alpha \cdot f(0) + 2\alpha \cdot f(1) = 0$

$\Rightarrow (\alpha f)(0) + 2(\alpha f)(1) = 0$

$\overset{(B)}{\Longrightarrow} \alpha f \in U$

$\Rightarrow$ U ist UVR von V

3b) $U := \{ f \in V \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : f(x) \le \alpha \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

Gegenbeispiel: • sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $\boxed{f(x) = -x^2}$

- dann gilt: $f(x) \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{f \in U}$

- andererseits müßte $(-1)f \in U$ gelten, wenn U ein UVR sein sollte
- es gilt: $((-1)f)(x) = -f(x) = x^2$

da diese Funktion unbeschränkt ist für $x \to +\infty$, existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $((-1)f)(x) \le \alpha \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (-1)f \notin U \implies$ U ist kein UVR von V

4a) $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0\}$

Gegenbeispiel: es gilt

$$\left.\begin{array}{l} x := (1,1,1,-1) \in U \\ y := (1,1,-1,1) \in U \end{array}\right\} \Rightarrow x+y = (2,2,0,0)$$

da $2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \neq 0$,

folgt $x+y \notin U$ $\Longrightarrow$ U ist kein UVR von $V = \mathbb{R}^4$

4b) $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_1 + x_2 - x_3 = 0}_{\text{Bed. } (B_1)}, \underbrace{x_2 + x_3 + x_4 = 0}_{(B_2)}\}$

- Seien $x, y \in U$

$\overset{(B_{1,2})}{\Longrightarrow}$ $x_1 + x_2 - x_3 = 0 \mid +$ und $x_2 + x_3 + x_4 = 0 \mid +$

und $y_1 + y_2 - y_3 = 0 \mid +$ und $y_2 + y_3 + y_4 = 0 \mid +$

$\underbrace{(x_1+y_1) + (x_2+y_2) - (x_3+y_3) = 0}$ und $\underbrace{(x_2+y_2) + (x_3+y_3) + (x_4+y_4) = 0}$

$\Rightarrow x+y$ erfüllt (B_1) $\Rightarrow x+y$ erfüllt (B_2)

$\Rightarrow x+y \in U$

- sei $x \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\overset{(B_{1,2})}{\Longrightarrow}$ $x_1 + x_2 - x_3 = 0 \mid \cdot \alpha$ und $x_2 + x_3 + x_4 = 0 \mid \cdot \alpha$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha x_1) + (\alpha x_2) - (\alpha x_3) = 0}$ und $\underbrace{(\alpha x_2) + (\alpha x_3) + (\alpha x_4) = 0}$

$\Rightarrow \alpha x$ erfüllt (B_1) $\Rightarrow \alpha x$ erfüllt (B_2)

$\Rightarrow \alpha x \in U$ $\Longrightarrow$ U ist UVR von $V = \mathbb{R}^4$