Musterlösungen Blatt 3

1a) z.z.: $(a \circ b)' = b' \circ a' \quad \forall a,b \in G$

- für $r := b' \circ a'$ zeigen wir: $\boxed{r \circ (a \circ b) = e}$ (1)

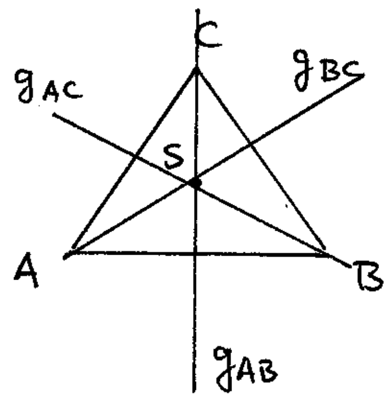
$$r \circ (a \circ b) = (r \circ a) \circ b = \big((\underbrace{b' \circ a'}_{=r}) \circ a \big) \circ b$$
$$= \big(b' \circ (\underbrace{a' \circ a}_{=e}) \big) \circ b$$
$$= b' \circ b = e \qquad \text{d.h. (1) gilt}$$

- (1) $\Rightarrow$ $r = (a \circ b)'$, denn das inverse Element ist eindeutig ∎

1b) z.z.: $(a')' = a \quad \forall a \in G$

- für $r := a$ zeigen wir: $\boxed{r \circ a' = e}$ (2)
- $r \circ a' = a \circ a' = e$, d.h. (2) gilt
- (2) $\Rightarrow$ $r = (a')'$ ∎

2)



sei g_{AB} = Mittelsenkrechte auf AB
g_{BC} = — " — BC
g_{AC} = — " — AC

sei $S_{AB} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ = Spiegelung an Gerade g_{AB}
S_{BC} — " — g_{BC}
S_{AC} — " — g_{AC}
$D_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ = Drehung um S mit 120° (nach links)
D_2 : — " — 240° — " —

sei $I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ = Drehung um S mit Winkel $0°$ ($\hat{=} 360°$)
= Identität, d.h. $\boxed{I(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2}$

a) die Elemente von G sind:

$$G = \{I, D_1, D_2, S_{AB}, S_{BC}, S_{AC}\}$$

b) <u>Verknüpfungstabelle :</u>

<u>Schreibweise:</u> $f(A,B,C) = (X,Y,Z)$ bedeutet

|| Punkt X ist an Position A, Y an Pos. B, Z an Pos. C

• es gilt: $I(A,B,C) = (A,B,C)$ $\quad S_{AB}(A,B,C) = (B,A,C)$

$D_1(A,B,C) = (C,A,B)$ $\quad S_{BC}(A,B,C) = (A,C,B)$

$D_2(A,B,C) = (B,C,A)$ $\quad S_{AC}(A,B,C) = (C,B,A)$

• für $I \in G$ gilt:

$(I \circ f)(x) \overset{\text{Def.}}{=} I(f(x)) = f(x)$, also $\boxed{I \circ f = f \quad \forall f \in G}$

$\Downarrow$

$\Rightarrow f \circ I = f$ $\qquad$ <u>I ist neutrales Element</u>

• die einzelnen Verknüpfungen ermittelt man wie folgt:

$\underline{\underline{S_{AB} \circ D_1}}(A,B,C) = S_{AB}(C,A,B) = (A,C,B) = \underline{\underline{S_{BC}}}(A,B,C)$

oder z.B.

$\underline{\underline{S_{AB} \circ S_{AC}}}(A,B,C) = S_{AB}(C,B,A) = (B,C,A) = \underline{\underline{D_2}}(A,B,C)$

analog für die anderen fch erhält man:

$f \backslash h$	I	D_1	D_2	S_{AB}	S_{BC}	S_{AC}
I	I	D_1	D_2	S_{AB}	S_{BC}	S_{AC}
D_1	D_1	D_2	I	S_{AC}	S_{AB}	S_{BC}
D_2	D_2	I	D_1	S_{BC}	S_{AC}	S_{AB}
S_{AB}	S_{AB}	S_{BC}	S_{AC}	I	D_1	D_2
S_{BC}	S_{BC}	S_{AC}	S_{AB}	D_2	I	D_1
S_{AC}	S_{AC}	S_{AB}	S_{BC}	D_1	D_2	I

2c) <u>Ist $(G, \circ)$ abelsch ?</u>

es gilt (s. Tabelle): $S_{AB} \circ S_{BC} = D_2$

$$S_{BC} \circ S_{AB} = D_1$$

also $S_{AB} \circ S_{BC} \neq S_{BC} \circ S_{AB} \Rightarrow (G, \circ)$ ist <u>nicht abelsch</u>

<u>3a)</u>

$$\frac{1}{i} z + (2+i) w = 0 \quad (1) \quad | \cdot i$$

$$2z - (1-i) w = 2 \quad (2)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad z + (2i + i^2) w = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = (1-2i) w} \quad (3)$$

$$\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \quad 2(1-2i) w - (1-i) w = 2$$

$$(1 - 3i) w = 2$$

$$\Rightarrow w = \frac{2}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{2+6i}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{5} + \frac{3}{5} i}}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad z = \frac{1}{5}(1-2i)(1+3i) = \frac{1}{5}\left((1+6) + i(-2+3)\right)$$

$$\underline{\underline{z = \frac{7}{5} + \frac{1}{5} i}}$$

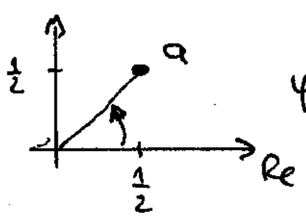
- die Probe bestätigt diese einzige Lösung

$$\underline{\underline{(z, w) = \left(\frac{7}{5} + \frac{1}{5} i, \frac{1}{5} + \frac{3}{5} i\right)}}$$

<u>3b)</u> $z \longmapsto z' = \frac{i}{1+i} z$

- sei $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$
- es gilt: $a = \frac{i}{1+i} = \frac{i}{1+i} \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i}}$

$$\Rightarrow |a| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



$$\varphi_a = \arg(a) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

Blatt 3

-4- $\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

- nach den Rechenregeln für Polarkoordinaten gilt

$$z' = a \cdot z = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot r\right)}_{=r'}\left(\cos(\underbrace{\varphi + \tfrac{\pi}{4}}_{=\varphi'}) + i\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4})\right)$$

also: z' hat die Polarkoordinaten (r', φ') mit

$$r' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, r, \quad \varphi' = \varphi + \tfrac{\pi}{4}$$

- $\Rightarrow$ Abb. $z \mapsto z'$ entspricht geometrisch
  - einer <u>Drehung von z um 0</u> mit Winkel $\frac{\pi}{4}$ (In mathematisch positive Richtung)
  - gefolgt von einer <u>zentrischen Stauchung</u> mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7\ldots$