Musterlösungen

① falls $P_{1,2,3}$ auf einer Geraden liegen, so muss P_3 die Geradengleichung der Geraden g durch P_1, P_2 erfüllen, d.h. $\exists\, t \in \mathbb{R}$ mit:

$$p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = p_1 + t(p_2 - p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-0 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \\ 4-3t \end{pmatrix}$$

$$\text{also} \left\{ \begin{array}{lcl} -1 = 3-2t & \longleftrightarrow & t=2 \\ 2 = t & \longleftrightarrow & t=2 \\ -2 = 4-3t & \longleftrightarrow & t=2 \end{array} \right\} \text{ ist erfüllbar für } t=2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ liegen auf einer Geraden

② $\underline{\text{geg}}$: $p, v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$

$$g = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \tilde{g} = \{p + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$$

<u>Beh</u>: $g = \tilde{g}$, falls $w = \alpha v$ mit $\alpha \neq 0$

<u>Bew</u>: • sei $w = \alpha v \overset{\alpha \neq 0}{\Longrightarrow} v = \frac{1}{\alpha} w$

a) <u>wir zeigen: $x \in g \Rightarrow x \in \tilde{g}$</u>

$$x \in g \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}: \ x = p + tv = p + t\left(\tfrac{1}{\alpha} w\right) = p + \tfrac{t}{\alpha} w \in \tilde{g} \quad \left(\text{da } \tfrac{t}{\alpha} \in \mathbb{R}\right)$$

b) <u>wir zeigen: $x \in \tilde{g} \Rightarrow x \in g$</u>

$$x \in \tilde{g} \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}: \ x = p + tw = p + t(\alpha v) = p + \underbrace{(t\alpha)}_{\in \mathbb{R}} v \in g$$

• aus a) und b) folgt $g = \tilde{g}$ ∎

3 <u>geg</u>: $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \neq (0,0)$

$$g = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \}$$

<u>Beh</u>: g ist Gerade im Sinne der Def. 1.2 der Vorlesung

<u>Bew</u>: • zu zeigen ist: $\exists \, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ so dass

$$\boxed{g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}} \qquad (1)$$

<u>1. Fall: $a \neq 0$</u>

• $(x,y) \in g \iff ax + by = c \overset{a \neq 0}{\iff} x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} y$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} y \\ y = 0 + 1 \cdot y \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix}}_{p} + \underbrace{\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} t$$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g$ im Sinne von (1) $\blacksquare$

<u>2. Fall: $b \neq 0$</u>

• $(x,y) \in g \iff ax + by = c \overset{b \neq 0}{\iff} y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} x \iff \exists t \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}}_{p} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}}_{v} t$$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g$ im Sinne von (1) $\blacksquare$

4 **Beh:** $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$

Bew: aus der Eigenschaft $\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

folgt:

- $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \underbrace{\langle w,v\rangle}_{=\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

- $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \underbrace{\langle w,v\rangle}_{=\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle$

$$= \|v\|^2 - 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

- Subtraktion der Gleichungen liefert:

$$\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\langle v,w\rangle$$

$\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$