Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

19.12.2023

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)
Übungsblatt 7

1. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z = x \,|\, x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ die geschlitzte komplexe Zahlenebene und S_- der offene Streifen $S_- := \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$. Dann sei $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to S_-$ die Umkehrfunktion der eingeschränkten Exponentialfunktion $\exp : S_- \to \mathbb{C}_-$. Man beweise, dass $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to S_-$ eine Stammfunktion zur Funktion $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}_-$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ ist.

2. Zu gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$ und reellem $r > 0$ bezeichne $\partial K_r(z_0)$ den Rand der Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r. Unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchyschen Integralformel berechne man die folgenden Integrale, bei denen die Randkurven jeweils im mathematisch positiven Umlaufsinn definiert seien:

   a) $\displaystyle\oint_{\partial K_1(2)} \frac{z^7 + 1}{z^2(z^4 + 1)}\, dz$

   b) $\displaystyle\oint_{\partial K_3(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1}\, dz$ (*Hinweis:* Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{z^2-1}$)

   c) $\displaystyle\oint_{\partial K_r(0)} \frac{\sin(z)}{z - p}\, dz$ wobei $p \in \mathbb{C}$ mit $|p| \neq r$ ein gegebener Parameter sei.

3. Zur Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$, $t \in [0, 1]$, berechne man die Integrale

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{|z|}\, dz$

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{|z|^9}\, dz.$

4. Zu gegebenem $z_0 \in \mathbb{C}$ und reellem $r > 0$ bezeichne $\partial K_r(z_0)$ den Rand der Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r. Man berechne den Wert des Integrals
$$\oint_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2 + 1}\, dz\,,$$
   wobei die Kurve γ gegeben ist durch

   a) $\gamma = \partial K_1(i)$

   b) $\gamma = \partial K_1(-i)$

   c) $\gamma = \partial K_3(0)$ (*Hinweis:* Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{z^2+1}$)

   und jeweils im mathematisch positiven Umlaufsinn definiert sei.