Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

30.11.2023

**Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)**
**Übungsblatt 6**

1. Man beweise: Für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) := \sqrt{|Re(z)|\,|Im(z)|}$$
sind im Punkt $z = 0$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt, jedoch ist $f(z)$ an der Stelle $z = 0$ nicht komplex differenzierbar.

2. In welchen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) := (Re(z))^3(Im(z))^2 + i(Re(z))^2(Im(z))^3$$
komplex differenzierbar ?

3. Auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ gegeben und $\gamma : [a,b] \to G$ sei eine glatte Kurve in $G$. Die Funktionen $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\phi_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2$, seien definiert als
$$\phi(t) := F(\gamma(t)) = \phi_1(t) + i\phi_2(t) \qquad \forall t \in [a,b]$$
mit $\phi_1(t) := \mathrm{Re}(\phi(t))$ und $\phi_2(t) := \mathrm{Im}(\phi(t))$. Man beweise die folgende Kettenregel:
$$\dot{\phi}(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \qquad \forall t \in (a,b)\,,$$
wobei $\dot{\phi}(t) := \dot{\phi}_1(t) + i\dot{\phi}_2(t)$.

4. Die Kurve $\gamma$ sei der mathematisch positiv orientierte Kreisbogen
$$\gamma(t) = e^{ti} \qquad \text{mit} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
Man berechne
$$\int_\gamma (z+i)^2\,dz$$
   a) durch direkte Rechnung über die Definition des Kurvenintegrals,
   b) über die Bestimmung einer Stammfunktion.

5. Die Kurve $\gamma$ sei die Gerade vom Punkt $z_1 = 1$ zum Punkt $z_2 = i$. Man berechne das Kurvenintegral
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz\,.$$