Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

16.11.2023

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)
Übungsblatt 5

1. a) Eine komplexe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei in einem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar. Man beweise, dass sie dann in z_0 auch stetig ist.

   b) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Man beweise mit Hilfe von Grenzwertsätzen die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Formel für die komplexe Ableitung der Potenzfunktion $f(z) = z^n$:

$$(z^n)' = nz^{n-1} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

3. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen $f(z)$ stetig und in welchen sie komplex differenzierbar sind:

   a) $f(z) = \bar{z}$

   b) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$

   c) $f(z) = |z|^2$.

4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängende Menge und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Man beweise, dass dann $f(z)$ konstant sein muss.

5. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und

$$f(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

   die sogenannte *Cayley-Abbildung* (Caylay, 1846). Man zeige, dass $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und für die Bildmenge $f(\mathbb{H})$ gilt

$$f(\mathbb{H}) = \mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}\,.$$