Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

07.11.2023

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)
Übungsblatt 4

1. Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für $z = z_1$, $z_1 \neq z_0$, konvergent ist, so ist sie bereits absolut konvergent in der offenen Kreisscheibe $K(z_0, r_1)$ mit
$$K(z_0, r_1) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r_1\}, \quad \text{wobei} \quad r_1 := |z_1 - z_0|.$$
Hinweis: Man verwende $|a_k(z-z_0)^k| = |a_k(z_1-z_0)^k| \cdot (\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|})^k$ und das Majorantenkriterium.

2. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird definiert über die Potenzreihe $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$. Man zeige
   a) Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $\rho = \infty$.
   b) Für beliebige $u, v \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.

3. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ werden im Komplexen definiert über die Potenzreihen
$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$
Man ermittle die Konvergenzradien beider Potenzreihen und zeige für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die Beziehungen
   a) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$
   b) $\sin(z) = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$
   c) $\cos(z) = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big)$.

4. Man bestimme jeweils alle $z \in \mathbb{C}$ mit
   a) $\exp(z) = -2$, b) $\exp(z) = i$, c) $\sin(z) = 100$, d) $\cos(z) = 3i$.

   Bei c) und d) nutze man die Exponentialdarstellung von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ aus der vorhergehenden Aufgabe.

5. Für beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beweise man die Additionstheoreme
   a) $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$
   b) $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$.

   Auch hier nutze man die Exponentialdarstellung von $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$.