Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 26.10.2023
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)
Übungsblatt 3

1. Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen

$$z_1 = -3 + 2i, \quad z_2 = 5i^3, \quad z_3 = 3 + 4i, \quad z_4 = -1 - 3i.$$

Berechnen Sie anschließend unter Verwendung des Resultates für z_4 die Zahl $z_5 = z_4^{40}$.

2. Bestimmen Sie sämtliche 6-ten Wurzeln $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, aus der Zahl $a = -64i$. Stellen Sie die Wurzeln in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

3. Seien (r_k, φ_k), $k = 1, 2$, die Polarkoordinaten der komplexen Zahlen $z_k \in \mathbb{C}$, d.h.

$$z_k = r_k(\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)).$$

a) Beweisen Sie ohne Verwendung der Exponentialdarstellung, dass für die Polarkoordinaten (r, φ) des Produktes $z = z_1 \cdot z_2$ gilt

$$r = r_1 \cdot r_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung von a) die Polardarstellung der Zahl $z_1 := z_2^{-1}$.

c) Bestimmen Sie unter Verwendung von a) und b) die Polardarstellung des Quotienten $w = z_1/z_2$.

4. Gegeben seien die komplexen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für die quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

$$z^2 + pz + q = 0$$

die Lösungsformel

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,,$$

wobei $\sqrt{a}$ die beiden Wurzeln aus der komplexen Zahl $a = \frac{p^2}{4} - q$ bezeichne. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 2iz - 2 - i = 0\,.$$