Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

17.10.2023

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)
Übungsblatt 2

1. Sei $\mathbb{C}$ die Menge
$$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\},$$
wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ mit
$$\phi(x + iy) := (x, y)$$
bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrabbildung ϕ^{-1} an.

2. Man bestimme die beiden Wurzeln $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ aus der Zahl $a = 3 + 2i$ in folgender Weise auf algebraischem Weg (also ohne Polardarstellung). Es gilt:
$$z = x + iy = \sqrt{a} \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad z^2 = a.$$
Man bestimmt also die beiden Wurzeln $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$, durch Ermittlung der beiden Lösungspaare $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2$, der Gleichung
$$(x + iy)^2 = 3 + 2i.$$
Hierbei beachte man, dass diese Gleichung im Komplexen äquivalent ist zu zwei Gleichungen im Reellen – eine Gleichung für die Gleichheit der Realteile und eine Gleichung für die Gleichheit der Imaginärteile.

3. Zu den drei dritten Wurzeln $z_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, aus der Zahl $a = i$ gebe man jeweils die Polarkoordinaten sowie den Real- und Imaginärteil an.

4. Die komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ habe die Polardarstellung
$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)), \qquad \varphi \in (-\pi, \pi]\,.$$
Man beweise die Formel für φ
$$\varphi = F(x, y) := \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für} \quad x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0,\ y < 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{für} \quad x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{für} \quad x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$
für den Fall $x < 0$, $y < 0$. und für den Fall $x < 0$, $y > 0$. In welchen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ ist die Funktion $\varphi = F(x, y)$ stetig ?

5. Der Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ habe die Polarkoordinaten (r, φ) und liege im zweiten Quadranten, d.h. es gelte $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Mit Hilfe geometrischer Überlegungen zeige man, dass dann gilt
$$x = r\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad y = r\sin(\varphi)\,.$$

6. Sei $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ die Umkehrfunktion der auf $[0, \pi]$ eingeschränkten cos-Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Man zeige: Zu gegebenem $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt für den zugehörigen polaren Hauptwinkel φ die Formel
$$\varphi = \begin{cases} \pi\,, & \text{falls } y = 0 \text{ und } x < 0, \\ \operatorname{sgn}(y) \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{sonst,} \end{cases}$$
wobei $\operatorname{sgn}(\cdot)$ die Vorzeichen-Funktion bezeichnet mit
$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1\,, & \text{falls } y > 0, \\ -1\,, & \text{falls } y < 0, \\ 0\,, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$