Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
apl. Prof. Dr. F. Schieweck
(Geb. 02-13a, Tel. 67-50135)

12.10.2023

Funktionentheorie für das Lehramt (WS 23/24)
Übungsblatt 1

1. Für
$$z_1 = \frac{3+2i}{1-i} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{5-3i}{1+2i}$$
bestimme man jeweils den Real- und Imaginärteil von

   a) $z = z_1 + z_2$

   b) $z = z_1 z_2$

   c) $z = z_1/z_2$.

2. Sei $\mathbb{C} := \{z = (x,y) : x \in \mathbb{R}. y \in \mathbb{R}\}$ definiert als Menge von Paaren mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen $\oplus : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und $\odot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Man zeige die folgenden Körperaxiome, wobei $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $k = 1,2,3$, beliebige Elemente aus $\mathbb{C}$ bezeichnen:

   a) $(z_1 \odot z_2) \odot z_3 = z_1 \odot (z_2 \odot z_3)$

   b) $z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \odot z_2) \oplus (z_1 \odot z_3)$

   c) Es existiert ein eindeutig bestimmtes neutrales Element $\underline{0} \in \mathbb{C}$ bezüglich der Addition $\oplus : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
   $$z \oplus \underline{0} = z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

   d) Es existiert ein eindeutig bestimmtes neutrales Element $\underline{1} \in \mathbb{C}$ bezüglich der Multiplikation $\odot : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
   $$z \odot \underline{1} = z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \underline{1} \neq \underline{0}.$$

   e) Zu jedem Element $z \in \mathbb{C}$ existiert ein eindeutig bestimmtes inverses Element $(-z) \in \mathbb{C}$ bezüglich der Addition mit der Eigenschaft
   $$z \oplus (-z) = \underline{0}.$$
   Man gebe die Komponenten von $(-z) = (x_1, y_1)$ in Abhängigkeit von den Komponenten von $z = (x,y)$ an.

   f) Zu jedem Element $z \in \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$ existiert ein eindeutig bestimmtes inverses Element $z^{-1} \in \mathbb{C}$ bezüglich der Multiplikation mit der Eigenschaft
   $$z \odot z^{-1} = \underline{1}.$$
   Man gebe die Komponenten von $z^{-1} = (x_2, y_2)$ in Abhängigkeit von den Komponenten von $z = (x,y)$ an.

3. Zu einer gegebenen komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ sei $z' \in \mathbb{C}$ diejenige Zahl, die durch Spiegelung des Punktes z an der imaginären Achse hervorgeht. Man gebe einen rechnerischen Ausdruck für z' in Abhängigkeit von z an.

4. Für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ bewiese man die Ungleichungen

   a) $||z| - |w|| \; \leq \; |z - w|$

   b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}(|x| + |y|) \; \leq \; |z| \; \leq \; |x| + |y|$

   c) $\max\{|x|, |y|\} \; \leq \; |z| \; \leq \; \sqrt{2}\, \max\{|x|, |y|\}$.