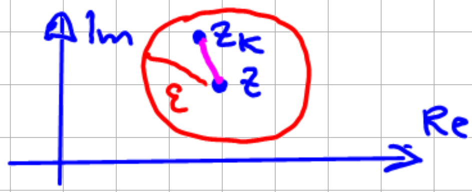
§1.2. Konvergente Folgen und Reihen

Def. 1.1: • Eine Folge $\{z_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ heißt konvergent g.d.w. $\exists$ Grenzwert $z \in \mathbb{C}$ mit $\boxed{\lim_{k\to\infty} z_k = z}$, d.h.



$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon): \quad |z - z_k| < \varepsilon \quad \forall k > n_0(\varepsilon)}$$

• Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt konvergent g.d.w. $\exists$ Grenzwert $s \in \mathbb{C}$ der Partialsummenfolge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k \quad , \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n .$$

Man schreibt dann $\quad s = \sum_{k=0}^{\infty} z_k .$

• Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt absolut konvergent g.d.w. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergent ist.

Konvergenzkriterien für Reihen

1) notwendiges Kriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergent} \implies \lim_{k\to\infty} z_k = 0$$

2) absolute Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergent}$$

3) Majorantenkriterium

Vor.: $\exists$ Majorante (M_k) mit

- $|z_k| \leq M_k \quad \forall k \geq k_0$ (Majorante)
- $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ ist konvergent

Beh.: $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ ist absolut konvergent

4) Quotientenkriterium

Vor.: $\exists$ Grenzwert $\quad q = \lim_{k \to \infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|}$

Beh.: $q < 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ ist abs. konv.

$q > 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ ist divergent

Potenzreihen

geg.: Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$

Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots$

Def.:

$$\boxed{\underbrace{f(z)}_{\text{Grenzfunktion}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Potenzreihe}}}$$

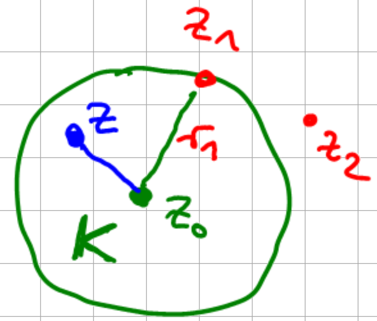
Frage: für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe?

- sie konvergiert mindestens für $\boxed{z = z_0}$
- wenn sie für ein $z_1 \neq z_0$ konvergiert, so konvergiert sie bereits absolut im Kreis

$$K(z_0, r_1) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_1 \}$$

mit

$$r_1 := |z_1 - z_0|$$



(Abel'scher Satz, Beweis ÜA)

- $\Rightarrow$: wenn die Reihe für z_1 divergiert, so divergiert sie $\forall\ z_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r_1)}$

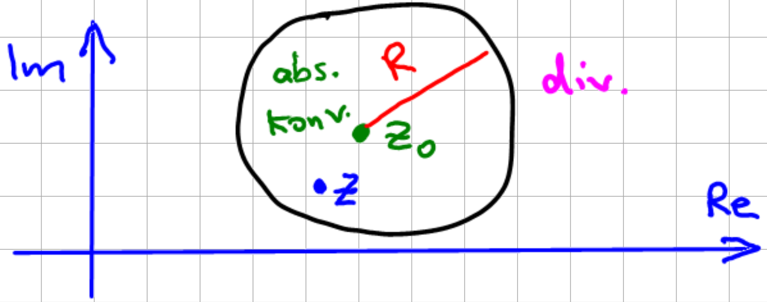
(Bew : indirekt)

- das Supremum

$$R := \sup \left\{ r_1 \;\middle|\; \exists z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } r_1 = |z_1 - z_0|, \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

liefert den Konvergenzradius, so dass

$$\text{Reihe} \begin{cases} \text{abs. konv.} & \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < R \\ \text{divergent} & \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| > R \end{cases}$$



Satz 1.2. (Eigenschaften von Potenzreihen)

Im Inneren des Konvergenzkreises

$$K(z_0, \underbrace{R}_{\text{Konvergenzradius}}) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \}$$

ist die Grenzfunktion f mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

a) stetig

b) differenzierbar (wird später def.)

mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Berechnung des Konvergenzradius R

falls der Grenzwert

$$q = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

existiert, so gilt

$$R = \begin{cases} \frac{1}{q} & , \text{ falls } q > 0 \\ \infty & , \text{ falls } q = 0 \end{cases}$$

Def. 1.3. Die Exponentialfkt. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

ist def. als

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k} \qquad (1.1)$$

- man kann zeigen (ÜA):

  der Konvergenzradius der exp-Reihe ist $R = \infty$, d.h. die Reihe konvergiert $\forall\, z \in \mathbb{C}$

- zum Beweis des Potenzgesetzes benötigt man

<u>Satz 1.4.</u> (<u>Multiplikationssatz für Reihen</u>)

Seien $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sowie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ <u>absolut konvergent</u>. Dann gilt

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)} \tag{1.2}$$

<u>Lemma 1.5.</u> (<u>Potenzgesetz für exp(·)</u>)

Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt für die exp-Funktion auf (1.1) die Formel

$$\boxed{\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)} \tag{1.3}$$

<u>Beweis:</u> ÜA

Def. 1.6. $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

sind definiert durch die Potenzreihen

$$\boxed{\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}} \tag{1.4}$$

und

$$\boxed{\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}} \tag{1.5}$$

Lemma 1.7. Für die in (1.4), (1.5), (1.1)

def. Funktionen $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$, $\exp(\cdot)$ gilt:

(a) der Konvergenzradius von $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ ist $R = \infty$, d.h. die Grenzfunkt. $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ sind stetig auf $\mathbb{C}$

(b) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt die EULER'sche Formel

$$\exp(iz) = \boxed{e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)} \tag{1.6}$$

(c) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right) \\ \cos(z) &= \frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right) \end{aligned}} \tag{1.7}$$

(d) $\forall\ z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{\exp(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))} \qquad (1.8)$$

$$\boxed{\begin{aligned} |e^z| &= |\exp(z)| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)} > 0 \\ \underbrace{\arg(e^z)}_{\text{polarer Winkel von } e^z} &= \underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{y} + 2k\pi \end{aligned}} \qquad (1.9)$$

$$\boxed{\mathrm{Re}(e^z) = e^x\cos(y), \quad \mathrm{Im}(e^z) = e^x\sin(y)} \qquad (1.10)$$

<u>Beweis:</u> ÜA

<u>Folgerung 1.8.</u> Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \end{aligned}} \qquad (1.11)$$

und für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z)} \qquad (1.12)$$