Satz 4.3: (Grenzübergang in Kurvenintegralen)

Vor.: • $f_n : G \to \mathbb{C}$ stetig

• $f_n \to f$ gleichmäßig auf G für $n \to \infty$

• $\gamma : [a,b] \to G$ glatte Kurve in G

Beh.:
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_\gamma f_n(z)\,dz}_{w_n} = \underbrace{\int_\gamma f(z)\,dz}_{w}} \qquad (4.1)$$

Beweis:

$$|w - w_n| = \left| \int_\gamma \big(f(z) - f_n(z)\big)\,dz \right|$$

$$\leq \max_{z\in\gamma} \left| f(z) - f_n(z) \right| \cdot \ell(\gamma)$$

$$< \varepsilon \cdot \ell(\gamma) \qquad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = w \implies (4.1) \quad \#$$

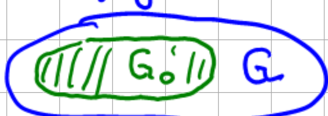
Satz 4.4 (Weierstraß, 1841)

Vor.: • G offen, $f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorph

• $f_n \to f$ gleichmäßig in G für $n \to \infty$

Beh.: • Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist holomorph

• $(f_n')_{n=1}^\infty$ konvergiert gegen $f' : G \to \mathbb{C}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $G_0 \subset G$



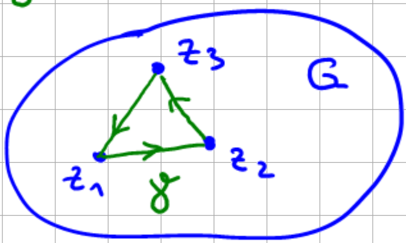
- zum Beweis von Satz 4.4 benötigen wir:

Satz 4.5 (Satz von Morera)

Vor.: • G offen, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig

• $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ $\forall$ geschloss. Dreieckswege

$\gamma = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ in G



Beh.: $f: G \to \mathbb{C}$ ist holomorph

Beweis: siehe z.B. Freitag/Busam

Beweis von Satz 4.4. (Weierstraß)

- sei $f(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ die Grenzfunktion $\forall z \in G$
- da $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig auf G, folgt nach Satz 4.2, dass $f: G \to \mathbb{C}$ stetig
- wir zeigen nun: $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ $\forall$ Δ-Wege $\gamma = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle \subset G$
- da $f_n: G \to \mathbb{C}$ holomorph vorausgesetzt, folgt nach dem Cauchy'schen Int'satz

$$\oint_\gamma f_n(z)\,dz = 0 \quad \forall \text{ geschl. Kurven } \gamma \subset G$$

- $\Rightarrow$ (mit Satz 4.3)

$$\underline{0} = \lim_{n\to\infty} \oint_\gamma f_n(z)\,dz \overset{S.4.3}{=} \underline{\oint_\gamma f(z)\,dz}$$

- nach dem Satz von Morera folgt daraus:

  $f: G \to \mathbb{C}$ ist holomorph

- den Teil: $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} f'$ gleichmäßig auf $G_0 \subset G$

  lassen wir hier weg

  (ist relativ aufwendig; siehe Lit.) #

gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenreihen

Def. 4.6. Unter einer Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$ versteht man die Folge von Partialsummen $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ mit $\boxed{f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)}$, $\varphi_k: G \to \mathbb{C}$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$ heißt gleichmäßig konvergent auf G, wenn die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergent auf G ist

Satz 4.7 (Majoranten-Kriterium für glm. Konv.)

Vor.: • $\varphi_k : G \to \mathbb{C}$ holomorph $\forall k$, G sei offen

• $\exists$ konvergente Majorante, d.h.

a) $|\varphi_k(z)| \le M_k \quad \forall z \in G \quad \forall k \ge k_0$ und

b) $\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k$ ist konvergent

Beh.: • $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$ konvergiert auf G absolut und gleichmäßig

• die Grenzfunktion $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$ ist holomorph auf G

Beweis:

• sei $z \in G$ ein fester Punkt

dann hat die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$ die konvergente Majorante $\sum_k M_k$

$\Rightarrow$ sie ist absolut konvergent mit einem Grenzwert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$$

damit ist die Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ def.

• wir zeigen, dass $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)$ gleichmäßig auf G gegen $f(z)$ konvergiert

- da $\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k$ konvergiert gilt nach dem <u>Cauchy-Kriterium</u>

$$\left.\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0(\varepsilon):\\ &\Big| \underbrace{\sum_{k=0}^{m} M_k}_{s_m} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} M_k}_{s_n} \Big| = \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon \\ &\qquad\qquad \forall m > n > n_0(\varepsilon) \end{aligned}\right\} (*)$$

- $\Rightarrow |f_m(z) - f_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \varphi_k(z) \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{|\varphi_k(z)|}_{\le M_k}$

$$\le \sum_{k=n+1}^{m} M_k \overset{(*)}{<} \varepsilon \qquad \forall z \in G$$

$$\forall m > n > n_0(\varepsilon)$$

- Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$|f(z) - f_n(z)| \le \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon) \;\forall z \in G$$

$\overset{\text{Def. 4.1}}{\Longrightarrow} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ glm. auf G

d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)$ konvergiert glm. auf G gegen $f(z)$

- nach Satz 4.4 (Weierstraß) ist die Grenzfunktion $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph #