Periodizität der exp-Funktion

Frage: bestimme alle $p \in \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{\exp(z+p) = \exp(z) \quad , \; z \in \mathbb{C}} \qquad (1.13)$$

Annahme $\exists\, z, p \in \mathbb{C}$ mit

$$\exp(z+p) = \exp(z) \quad \Big| \cdot \exp(-z)$$

$$\overset{\text{Potenz-}}{\underset{\text{gesetz}}{\Longrightarrow}} \quad \exp(\underbrace{-z+z+p}_{=p}) = \exp(\underbrace{-z+z}_{=0})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\exp(p) = 1}$$

- sei $\boxed{p = q + i\varphi}$ $\Rightarrow$ $\exp(q + i\varphi) = e^q e^{i\varphi} = 1 \quad \Big| |\cdot|$

$$\Rightarrow \quad |e^q \cdot e^{i\varphi}| = |\underbrace{e^q}_{>0}| \cdot |e^{i\varphi}| = |1| = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^q \cdot \underbrace{|\cos\varphi + i \sin\varphi|}_{=1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^q = 1 = e^0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = i\varphi}$$

- $\exp(p) = 1 \Rightarrow e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi = 1$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \cos\varphi = 1 \\ \sin\varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \varphi = 2k\pi \, , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = 2k\pi i \quad , \quad k \in \mathbb{Z}}$$

- also: gilt (1.13) für ein $z \in \mathbb{C}$, so folgt

$$p = 2k\pi i \, , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Probe: sei $\boxed{p = 2k\pi i}$ und $z \in \mathbb{C}$ beliebig

$$\Rightarrow \exp(z+p) = \exp(z) \cdot \exp(\underbrace{2k\pi i}_{=p})$$

$$= \exp(z) \cdot \left(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + i \underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} \right)$$

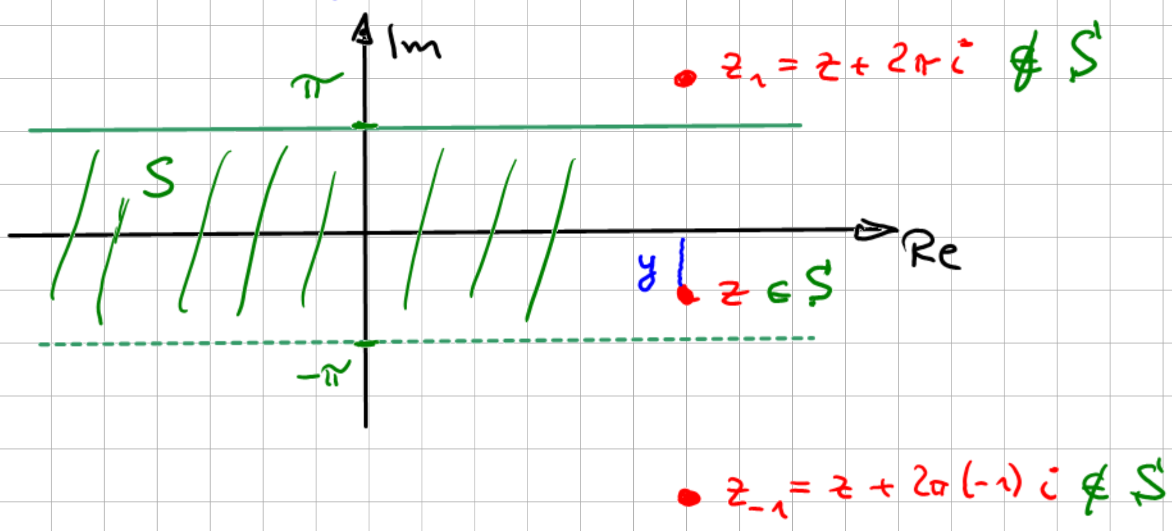
$$= \exp(z)$$

Ergebnis:

$$\boxed{\exp(z+p) = \exp(z) \iff p = 2k\pi i \,,\, k \in \mathbb{Z}} \quad (1.14)$$

- um $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ injektiv zu machen, schränkt man den Def'bereich ein auf den Streifen $S \subset \mathbb{C}$

$$S := \{ z = x + iy \mid y \in (-\pi, \pi] \}$$



- dann gilt:

$$\boxed{\text{die Abb. } \exp: S \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ist bijektiv}} \quad (1.15)$$

Beweis:

① injektiv: z.z.: aus $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ mit $z_1, z_2 \in S$ folgt $z_1 = z_2$

- $\exp(z_2) = \exp\left(z_1 + \underbrace{(z_2 - z_1)}_{=p}\right) = \exp(z_1)$

$\overset{(1.14)}{\Longrightarrow}$ $p = z_2 - z_1 = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$

- aus $z_1 \in S$ folgt $z_1 + 2k\pi i \notin S \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- deshalb folgt aus $z_2 = z_1 + p = z_1 + 2k\pi i \in S$,

dass $k = 0$, d.h. $\boxed{z_2 = z_1}$ #

② surjektiv: z.z.: $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; \exists z \in S$ mit $w = \exp(z)$

- $w \neq 0 \Longrightarrow |w| = r > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \boxed{r = e^x}$
- Polardarstellung von w: $\boxed{w = r \cdot e^{i\varphi}}$

mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sei $\boxed{y := \varphi \in (-\pi, \pi]}$

- dann ist $z := x + iy \in S$ und

$\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \underbrace{e^x}_{=r} \cdot e^{i\varphi} = w$ #

- **beachte:** für $z = \exp^{-1}(w) = x + iy$

ist $x = \ln(r) = \ln(|w|)$

$y = \varphi = \operatorname{Arg}(w) \in (-\pi, \pi]$

- da $\boxed{\exp: S \to \mathbb{C}\setminus\{0\}}$ bijektiv, gibt es die Umkehrfunktion "Log" mit

$$\boxed{\mathrm{Log}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S} \quad \text{(bijektiv)}$$

(Hauptzweig des Logarithmus), wobei

$$\boxed{\exp(z) = w\,,\ z \in S \iff z = \mathrm{Log}(w)}$$

und (s. oben)

$$\boxed{z = x + iy = \mathrm{Log}(w) = \underbrace{\ln(|w|)}_{=x} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(w)}_{=y}} \qquad (1.16)$$

$\mathrm{Arg}(w) \in (-\pi, \pi]$ Hauptargument von w

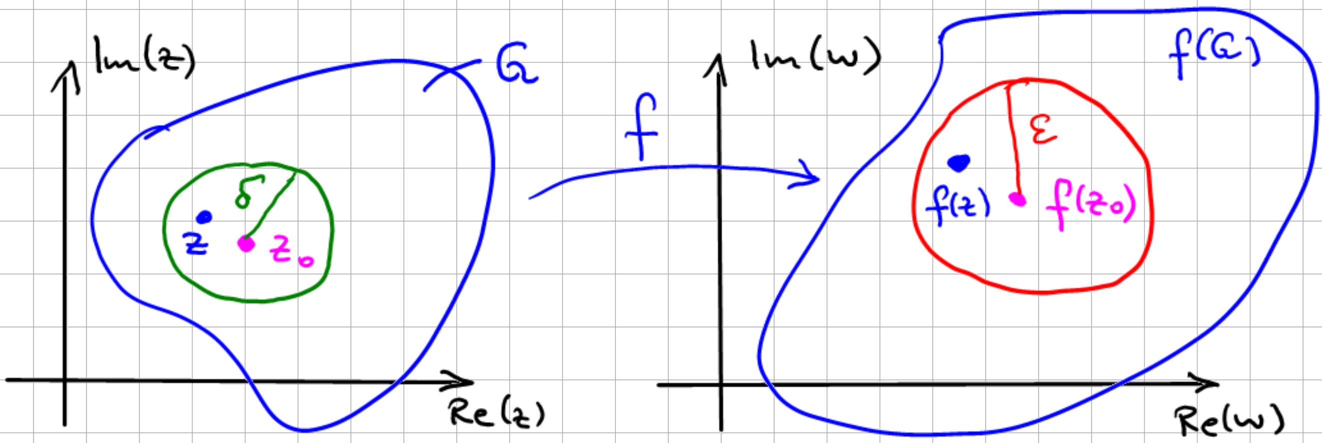
§1.3. Stetigkeit von Funktionen

Def. 1.9. Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine komplexe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ heißt **stetig im Punkt $z_0 \in G$** g.d.w.

$$\boxed{\underbrace{\lim_{z \to z_0} f(z)}_{\text{Grenzwert}} = \underbrace{f(z_0)}_{\text{Funktionswert}}}$$

d.h. nach "Epsilontik"-Def:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \\ \qquad |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \end{array}}$$



z-Ebene

w-Ebene

- äquivalent zur "Epsilontik"-Def. ist die "Folgendef." für "Stetigkeit in z_0":

für jede Folge $(z_n) \subset G$ mit $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0$

gilt $\boxed{\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)}$

- Bedeutung der Stetigkeit bei der Grenzwert-Berechnung: $g = \lim_{z \to z_0} f(z)$

$$\boxed{\text{man kann den Grenzpunkt } z = z_0 \text{ einfach einsetzen, falls } f(\cdot) \text{ in } z_0 \text{ stetig}}$$

Bsp.: $\lim_{z \to 2i} \underbrace{\sin\left(\frac{z^2 - z + 5}{z^2 + z}\right)}_{\text{stetig } \forall\, z_0 \notin \{0, -1\}} = \sin\left(\frac{1 - 2i}{-4 + 2i}\right)$

Darstellung einer komplexen Fkt. $f: G \to \mathbb{C}$

- $f: G \to \mathbb{C}$ entspricht zwei reellen 2D-Fkt'nen

$$u, v : G_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\boxed{G_{\mathbb{R}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x + iy \in G\}}$$

also: $z = x + iy \in G$ g.d.w. $(x, y) \in G_{\mathbb{R}^2}$

- zu geg. $z = x + iy \in G$ hat der Funktionswert $w = f(z)$ eine Darstellung $w = u + iv$, genauer

$$\boxed{w = f(\underbrace{x + iy}_{z \in G}) = u(x, y) + i\, v(x, y) \quad \forall\, (x, y) \in G_{\mathbb{R}^2}} \quad (1.17)$$

d.h. $\boxed{u(x, y) := \operatorname{Re}(f(x + iy)), \quad v(x, y) := \operatorname{Im}(f(x + iy))}$

- **Bsp.:** <u>geg</u>: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$

  <u>ges.</u>: $u, v: G_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$, hier $G_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$

  $$f(x+iy) = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\,\underbrace{2xy}_{v}$$

  <u>also</u> $u(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
  $v(x,y) = 2xy$

Lemma 1.10: $f: G \to \mathbb{C}$ ist <u>stetig in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$</u>

<u>g.d.w.</u> $u(x,y)$ und $v(x,y)$ sind <u>stetig in $(x_0, y_0) \in G_{\mathbb{R}^2}$</u>

Beweis: über Epsilontik.

Lemma 1.11: Die beiden Funktionen $f, g: G \to \mathbb{C}$ seien <u>stetig in $z_0 \in G$</u>. Dann sind auch folgende Verknüpfungen stetig in $z_0 \in G$:

$$f+g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\underline{\text{Vor.}}: g(z_0) \neq 0)$$

Beispiele:

1) über Folgendef. zeigt man leicht, dass

   $f(z) = c = \text{const.}$ <u>und</u> $g(z) = z$

   <u>stetig sind in allen $z_0 \in \mathbb{C} = G$</u>

2) aus Lemma 1.11 folgt mit 1.) induktiv:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{(Polynom vom Grad } \leq n\text{)}$$

ist stetig in allen $z_0 \in \mathbb{C}$ (wobei $a_k \in \mathbb{C}$)

3) aus 2) und $g(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$, $b_m \neq 0$,

$b_k \in \mathbb{C}$, folgt mit Lemma 1.11, dass

$$R(z) := \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k z^k}$$

ist stetig in allen $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$g(z_0) = \sum_{k=0}^{m} b_k z_0^k \neq 0$$

4) $f(z) = \exp(z)$, $f(z) = \cos(z)$, $f(z) = \sin(z)$

sind stetig in allen $z_0 \in \mathbb{C}$

(denn: Grenzfunktion der Potenzreihe

ist stetig im Inneren des Konvergenzkreises

$K(0,\infty) = \mathbb{C}$)