Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik

20.01.2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 11
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 28.01.2011, in der Vorlesung)

1. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das homogene DGL-System $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(**4 Punkte**)

2. Lösen Sie das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ e^t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(**6 Punkte**)

3. Gegeben sei die inhomogene lineare DGL

$$y''' - 3y' + 2y = 9e^t\,.$$

   a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur zugehörigen homogenen DGL.
   b) Ermitteln Sie mittels Variation der Konstanten eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

(**3+4 Punkte**)

4. Gegeben sei das inhomogene lineare DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zum zugehörigen homogenen DGL-System.
   b) Diskutieren Sie das zugehörige Phasendiagramm.
   c) Ermitteln Sie mittels Variation der Konstanten eine spezielle Lösung des inhomogenen DGL-Systems.
   d) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

5. Es seien A, B, C beliebige $n \times n$ - Matrizen. Man zeige, dass die Matrixfunktion e^A folgende Eigenschaften hat:

a) e^A ist invertierbar (was ist $\left[e^A\right]^{-1}$?).

b) Ist C invertierbar, so gilt $\quad C^{-1}e^AC = e^{C^{-1}AC}$.

c) Es gilt $\quad \det(e^A) = e^{\mathrm{spur}(A)}$.

d) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ ist im allgemeinen falsch. Geben Sie hierfür ein Gegenbeispiel an.