Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik 17.12.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 10
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 4** am Freitag, 14.01.2011, in der Vorlesung)

1. Zu gegebenen Größen $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ sei $X := \{y \in C^0(I; \mathbb{R}^n) : y(t) \in \overline{B_r(y_0)},\ t \in I\}$ mit $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine Menge stetiger vektorwertiger Funktionen, auf der die Abstandsfunktion
$$d(y, \tilde{y}) := \max_{t \in I} e^{-\alpha|t-t_0|}|y(t) - \tilde{y}(t)|$$
mit einem positiven Parameter α und der Euklidischen Norm $|\cdot|$ im $\mathbb{R}^n$ erklärt sei. Zeigen Sie, dass (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.
(**6 Punkte**)

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f(y) > 0$ für alle $y < 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = y_0 < 0$ für alle $t \geq 0$ existiert und dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ gilt.
(**4 Punkte**)

3. Zeigen Sie mit Hilfe von Existenz- und Fortsetzungssätzen aus der Vorlesung, dass für $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ das Anfangswertproblem
$$y' = \frac{e^{t^2} y^5}{1 + y^4} \arctan(t^3 y) + \cos\left(\frac{y}{1 + t^2}\right), \qquad y(t_0) = y_0$$
eine eindeutig bestimmte Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.
(**4 Punkte**)

4. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich des zweiten Argumentes stetig differenzierbar. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes 2.9 aus der Vorlesung, dass zu beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems
$$y' = f(t, y)\sin(|y|), \qquad y(0) = y_0$$
für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.
(**4 Punkte**)

5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie für das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen $y' = f(y)$ folgende Aussagen:

   a) Sind $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen, so ist entweder $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$ oder $y_1(t) \neq y_2(t)$ für alle $t \in I$.

   b) Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung und gibt es $t_1, t_2 \in I$ mit $y(t_1) = y(t_2)$ und $t_1 < t_2$, so läßt sich y auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen und es gilt $y(t + T) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $T = t_2 - t_1$.
   Hinweis: Definieren Sie durch periodische Fortsetzung von y eine weitere Lösung $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und zeigen Sie dann $y \equiv \tilde{y}$.

c) Sei $y : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Falls der Grenzwert $\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert, so gilt $f(\bar{y}) = 0$. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst: Ist $\phi : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \phi'(t) = \alpha > 0$, so folgt $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$.

6. Geben Sie ein Beispiel für ein Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$$

an, dessen eindeutige Lösung auf dem maximalen Existenzintervall (t_-, t_+) mit $t_- > -\infty$ existiert sowie die Eigenschaften

$$\lim_{r\searrow 0} \inf_{t\in(t_-,t_-+r)} \operatorname{dist}\Big((t, y(t)),\ \partial D\Big) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\searrow t_-} |y(t)| < \infty$$

erfüllt.