Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik 09.12.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 9
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 17.12.2010, in der Vorlesung)

1. Betrachten Sie das System der *Volterra-Lotka-Gleichungen* $y' = f(y)$ wobei $f : D \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch
$$f(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y_2) y_1 \\ (-\gamma + \delta y_1) y_2 \end{pmatrix}$$
mit $D := (0, \infty)^2$ und positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Bestimmen Sie ein *erstes Integral* $F(y_1, y_2)$ für dieses System und ermitteln Sie hierzu alle globalen Extrema. Zeigen Sie, dass für ein globales Extremum $y_0 \in D$ von $F(\cdot,\cdot)$ das Anfangswertproblem $y' = f(y)$ mit $y(t_0) = y_0$ nur die stationäre Lösung $y(t) = y_0$ haben kann. Tipp: Multiplizieren Sie zur Bestimmung des erstes Integrals die erste Gleichung mit $(-\gamma + \delta y_1)/y_1$ und die zweite mit $(\alpha - \beta y_2)/y_2$. Zeigen Sie, dass $F(\cdot,\cdot)$ konvex oder konkav ist.
(**6 Punkte**)

2. Zeigen Sie, dass für $z \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ gilt:
$$\left| \int_a^b z(t)\,dt \right| \le \int_a^b |z(t)|\,dt\,,$$
(**4 Punkte**)
wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich y genüge. Es gelte $f(-t, y) = -f(t, y)$ für alle $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $y : [-a, a] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = f(t, y)$, so gilt $y(-t) = y(t)$ für alle $t \in [-a, a]$. *Hinweis:* Betrachten Sie ein geeignetes Anfangswertproblem.
(**4 Punkte**)

4. Man transformiere die Differentialgleichung für das mathematische Pendel
$$x''(t) + \omega \sin(x(t)) = 0$$
in ein System 1. Ordnung und bestimme anschließend für dieses System ein *erstes Integral* $F(\cdot,\cdot)$. Man ermittle die stationären (kritischen) Punkte von F, d.h. solche Punkte, an denen $\nabla F = 0$ gilt, und skizziere das zugehörige Phasenportrait.

5. Man löse die *Bernoulli'sche Differentialgleichung*
$$y' - \frac{3}{t} y = t^4 y^{1/3}, \qquad y(1) = 0$$
mit Hilfe der Transformation $z(t) = y(t)^p$, wobei p eine geeignete Potenz ist, so dass man eine lineare Differentialgleichung erhält.