Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik

25.11.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 7
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 03.12.2010, in der Vorlesung)

1. Sei $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z < 4\}$. Bestimmen Sie den Fluß des Vektorfeldes $F(x, y, z) := (x, y, 3)$ durch den Rand $\partial\Omega$ (von innen nach außen) auf zwei verschieden Wegen:

   a) direkt durch Berechnung des Oberflächenintegrals

   b) mit Hilfe des Satzes von Gauß.

   (**4 + 2 Punkte**)

2. a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Menge, für die der Gauß'sche Integralsatz gilt. Es sei $\partial\Omega = \gamma([a, b))$, wobei die Abbildung $\gamma|_{(a,b)}$ eine injektive Immersion sei, die $\partial\Omega$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufe. Zeigen Sie, dass

   $$\mu_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b \Big(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\Big)\, dt.$$

   Hinweis: Man betrachte das Vektorfeld $F(x, y) = (x, y)$ und wende den Gauß'schen Integralsatz an.

   b) Die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r(\varphi) := \sin(2\varphi)$ mit $0 \le \varphi \le \pi/2$ berandet eine offene Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Menge Ω und berechnen Sie deren Inhaltsmaß $\mu_2(\Omega)$.

   (**3 + 3 Punkte**)

3. a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(tx) = t^k f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Man zeige, dass

   $$\int_{B_1(0)} \triangle f(x)\, dx = k\int_{S^{n-1}} f(x)\, dS(x),$$

   wobei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel um den Nullpunkt mit Radius 1 und S^{n-1} deren Rand bezeichnen.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\nabla f(x) \cdot x = kf(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

   b) Zeigen Sie, dass $\mu_n(B_1(0)) = \int_{S^{n-1}} x_j^2\, dS(x)$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

   (**2 + 2 Punkte**)

4. Sei $H > 0$, $R > 0$ und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < H,\ x^2 + y^2 < R^2\}$.

   a) Parametrisieren Sie den Rand ∂Z (als Vereinigung von Boden-, Deckel- und Mantel-Fläche) mit Hilfe von Zylinder- und Polarkoordinaten.

   b) Sei $F(x, y, z) = \tilde{F}(r, \varphi, z) = \big(f(r)\cos(\varphi), f(r)\sin(\varphi), 0\big)$ ein "zylindersymmetrisches" Vektorfeld zu einer gegebenen Funktion $f : [0, R] \to \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie den Fluß

   $$I = \int_{\partial Z} F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z)\ dS(x, y, z)$$

   sowohl direkt als auch mit Hilfe des Satzes von Gauß.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $v \in C^2(\bar{\Omega})$ eine "harmonische" Funktion, d.h. $\triangle v = 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS(x) = \int_{\Omega} \|\nabla v(x)\|^2 \, dx.$$

Folgern Sie daraus die Aussage: Ist Ω zusammenhängend und gilt $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$, so ist die Funktion v konstant.