Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik 18.11.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 6
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 26.11.2010, in der Vorlesung)

1. a) Zu gegebenem Radius $R > 0$ und gegebener Höhe $H > 0$ sei M die Mantelfläche des Zylinders mit $M := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 = R^2, \; 0 \leq z \leq H\big\}$. Berechnen Sie für die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ das Integral $\displaystyle\int_M f(x,y,z)\, dS(x,y,z)$.

   b) Die Abbildung $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $\varphi(u) := \big(u - \sin(u), \, 1 - \cos(u)\big)^T$. Skizzieren Sie die Kurve $C := \varphi\big((0,2\pi)\big)$ und berechnen Sie deren Länge L.

   (**3 + 3 Punkte**)

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Menge, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M := \{x = (u, \psi(u)) \in \mathbb{R}^n : \; u \in \Omega\}$ der Graph von ψ über Ω. Zeigen Sie für integrierbare Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ die Formel
$$\int_M f(x)\, dS(x) = \int_\Omega f\big(u, \psi(u)\big) \sqrt{1 + \|\nabla\psi(u)\|^2}\, du.$$
   Hinweis : Zeigen Sie zunächst, dass die Gram'sche Matrix $G(u)$ zur Parametrisierung $\varphi(u) = \big(u, \psi(u)\big)$ die Form $G(u) = E_{n-1} + A$ hat, wobei $A = a \cdot a^T$ mit $a = \nabla\psi(u)$ gilt und E_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Ermitteln Sie die Eigenwerte von A, danach die von $G(u)$ und berechnen Sie damit $\det(G(u))$.

   (**4 Punkte**)

3. Für $a > b > 0$ sei $\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 < b^2\right\}$. Zeigen Sie, dass Ω einen C^1-Rand hat und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld ν.

   (**4 Punkte**)

4. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit positiven Funktionswerten sowie $\varphi : (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$\varphi(u,v) := \begin{pmatrix} f(u)\cos(v) \\ f(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix}.$$
   Skizzieren Sie die Fläche $M := \varphi\big((a,b) \times (0,2\pi)\big)$ und berechnen Sie deren Inhalt $\mathrm{Vol}_2(M)$.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ derjenige Körper, der von unten durch die Sphäre $S_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 2z\}$ und von oben durch die Sphäre $S_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ begrenzt wird. Man berechne den Einheitsnormalen-Vektor $\nu(x,y,z)$ für alle Randpunkte $(x,y,z) \in \partial\Omega$, für die er existiert. Für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x,y,z) = (x,y,z)^T$ bestimme man mittels geeigneter Parametrisierungen des Randes $\partial\Omega$ den Wert des Integrals
$$\int_{\partial\Omega} F(x,y,z) \cdot \nu(x,y,z)\, dS(x,y,z).$$