Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik

11.11.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 5
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 19.11.2010, in der Vorlesung)

1. Sei $H_+ := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_n > 0\}$ der "obere" Halbraum des $\mathbb{R}^n$ und $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : ||u|| < 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n-1}$. Leiten Sie mit Hilfe der Transformationsformel die folgende Gleichung her
$$\int_{H_+} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_\Omega f\Big(ru, r\sqrt{1-\|u\|^2}\Big) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,du \right) dr, \qquad f \in L(H_+).$$
(**4 Punkte**)

2. Zu einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1 - a^4$ sowie M_a die Niveaumenge $M_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$.
   a) Bestimmen Sie alle Parameter $a \in \mathbb{R}$, so dass M_a eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.
   b) Geben Sie für den Fall $|a| > 1$ eine Parametrisierung von M_a in der Form $r = r(\varphi)$ an, wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von (x,y) sind.
(**4 + 2 Punkte**)

3. Bestimmen Sie unter Verwendung der Aussagen von Aufgabe 4 die entsprechenden *Tangentialräume* T_pM zu folgenden Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{R}^3$ im angegebenen Punkt $p \in M$:
   a) $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}, \quad p = (x,y,0) \in M$.
   b) M sei der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := 3x^2 - 2y^2 + \cos(\pi(x-y))$ und p der Punkt $p = (1, 2, f(1,2))$.
(**3 + 3 Punkte**)

4. Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor an M in p*, falls es zu hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big) \subset M$, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Als *Tangentialraum* T_pM bezeichnet man die Menge alle Tangentialvektoren an M in p. Man zeige:
   a) Ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ eine lokale Parametrisierung von M in Umgebung des Punktes $p = \varphi(\bar{u})$ mit $\bar{u} \in \Omega$, so gilt
$$T_pM = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\bar{u}), \, \ldots \, , \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(\bar{u}) \right\}.$$
   b) Ist M in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Punktes $p \in M$ darstellbar als Niveaumenge $M \cap U = \{x \in U : \; f(x) = 0\}$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $\operatorname{rang}(Df(x)) = n - k$ für alle $x \in U$, so gilt:
$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^n : \; \langle \operatorname{grad} f_j(p), \, v \rangle = 0, \; \forall\, j = 1, \ldots, n-k\}\,.$$

5. Sei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und C die Niveaumenge

$$C := \{(x, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : \; f(x, z) = 0\}.$$

Der Gradient von f sei in allen Punkten $(x, z) \in C$ verschieden vom Nullvektor. Zeigen Sie, dass dann die Menge

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\, z\right) = 0\right\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.