Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik 04.11.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 4
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 12.11.2010, in der Vorlesung)

1. Gegeben sei die Funktion $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $F(t) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\Big(-x^2 - \frac{t^2}{x^2}\Big)\,dx.$

   a) Zeigen Sie, dass F auf $D = [0,\infty)$ stetig und für jedes $t_0 > 0$ auf $D_0 = (t_0, t_0+1)$ differenzierbar ist.

   b) Leiten Sie die Formel $F'(t) = -2F(t)$ für beliebiges $t > 0$ her und begründen Sie damit, dass $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t}$. *Hinweise:* Man substituiere $\frac{t}{x}$. Aus der Formel für $F'(t)$ folgere man zunächst $\frac{d}{dt}(e^{2t}F(t)) = 0$.

   (**3 + 2 Punkte**)

2. Sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten beantworte man die Frage, für welche $\alpha > 0$ die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \|x\|^{-\alpha}$ über der Menge

   $$M := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$$

   Lebesgue integrierbar ist ? (**4 Punkte**)

3. Die Abbildung Φ, die den *Zylinderkoordinaten* (r,φ,z) die zugehörigen kartesischen Koordinaten (x,y,z) zuordnet, ist definiert durch

   $$(x,y,z) = \Phi(r,\varphi,z) := (r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z), \qquad (r,\varphi,z) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times (-\infty,\infty).$$

   a) Zur offenen Menge $U := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (-\infty,\infty)$ sei $V := \Phi(U)$. Ermitteln Sie die Menge $\mathbb{R}^3 \setminus V$ der nicht durch U darstellbaren kartesischen Koordinaten sowie deren Maß. Zu einer meßbaren Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ sei $\widehat{M} := \Phi^{-1}(M \cap V)$ die Menge zugehöriger Zylinderkoordinaten aus U. Beweisen Sie die Formel

   $$\mu(M) = \int_{\widehat{M}} r\,d(r,\varphi,z).$$

   b) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ derjenige Körper, der von oben durch die Sphäre $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z\}$ und von unten durch den Kegelmantel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 = x^2 + y^2\}$ begrenzt wird. Bestimmen Sie die Menge $\widehat{M}$ der zugehörigen Zylinderkoordinaten und berechnen Sie daraus das Volumen von M.

   (**3 + 3 Punkte**)

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $F(t) := \int_0^\infty e^{-tx}\,dx$ beliebig oft differenzierbar ist, und leiten Sie daraus die Formel $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$ ohne Benutzung partieller Integration her.

5. Sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man das Integral $I = \int_M \sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y)$.