Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik

28.10.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 3
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 05.11.2010, in der Vorlesung)

1. Gegeben sei die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$. Zeigen Sie, dass hierfür zwar das uneigentliche Riemann-Integral $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^{2\pi n} f(x)\,dx$ existiert, aber f auf $[1, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. *Hinweis:* Man zeige zunächst für $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen
$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)\,dx < \Big(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}\Big)c_1 \qquad \text{und} \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx > \frac{1}{k+1}c_1,$$
wobei $c_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx$. (**4 Punkte**)

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ der Torus, der durch Rotation der Kreisfläche
$$K := \big\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x-a)^2 + z^2 \le b^2\big\}, \qquad a > b > 0,$$
um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie das Volumen von M mit Hilfe des Cavalieri'schen Prinzips für Mengen zu festen z-Koordinaten. (**4 Punkte**)

3. Gegeben sei die Ellipsenfläche $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 \le 4\}$. Man berechne den Wert des Lebesgue-Integrals
$$I = \int_M y^2\, d(x, y)$$
durch Anwendung des Satzes von Fubini. (**4 Punkte**)

4. Sei
$$S_n := \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_i \ge 0, i = 1, \dots, n,\ \sum_{i=1}^n x_i \le 1\}$$
das n-dimensionale Simplex und $\mu_n(\cdot)$ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$. Man zeige die Rekursionsbeziehung
$$\mu_n(S_n) = \frac{1}{n}\mu_{n-1}(S_{n-1})$$
sowie die Formel $\mu_n(S_n) = 1/(n!)$.

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$. Berechnen Sie das Integral $I = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\,dy\,dx$ und beweisen Sie anschließend, die Formel
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$
indem Sie zwischen diesem Integral und dem Integral $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\,dx\,dy$ einen Zusammenhang herstellen.