Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik 21.10.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 2
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 29.10.2010, in der Vorlesung)

1. Zeigen Sie, dass für Parameterwerte $\alpha \in (0,1)$ die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-\alpha}$ Lebesgue integrierbar ist, indem Sie nachweisen, dass eine integrierbare einfache Funktion $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in (0,1]$. (**4 Punkte**)

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $I : L(M) \to \mathbb{R}$ die Abbildung $I(f) := \displaystyle\int_M |f(x)|\, dx$ auf der Menge $L(M)$ der Lebesgue integrierbaren Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$. Man zeige folgende Aussagen:

   a) $I : L(M) \to \mathbb{R}$ definiert eine Halbnorm, d.h. für beliebige $f, g \in L(M)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $I(f) \geq 0$, $I(\lambda f) = |\lambda| I(f)$ und $I(f+g) \leq I(f) + I(g)$.

   b) Aus $I(f) = 0$ folgt $f(x) = 0$ fast überall in M. *Hinweis:* Beweisen Sie zunächst

   $$\mu\Big(\{x \in M : \ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}\Big) \leq n \int_M |f(x)|\, dx\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (**3+2 Punkte**)

3. Sei $M = [0,1]$, $p > 0$ ein Parameter und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge von Funktionen $f_k : M \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) := \dfrac{k^p x}{1 + k^2 x^2}$.

   a) Für welche p ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent und wie lautet die zugehörige Grenzfunktion ?

   b) Für welche p besitzt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine integrierbare Majorante ? *Hinweis:* Man zeige zunächst die Ungleichung $(kx)^p \leq 1 + k^2 x^2$ für $x \in [0,1]$ und geeignetes p.

   c) Für welche p sind Integration und Grenzübergang $k \to \infty$ bei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vertauschbar ?

   (**3+2+2 Punkte**)

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(-|x|^2)$ Lebesgue integrierbar ist, indem Sie nachweisen, dass eine integrierbare einfache Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Es seien A_k, $k \in \mathbb{N}$, meßbare Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$. Man zeige, dass dann fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ in höchstens endlich vielen der Mengen A_k liegen.

6. Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sin(nx)$. Man zeige, dass hierfür keine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergieren kann. *Hinweis:* Man wende den Satz von Lebesgue auf die Folge $g_k(x) := (\sin(n_k x) - \sin(n_{k+1} x))^2$ an.