Prof. Dr. Klaus Deckelnick
Institut für Analysis und Numerik 13.10.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2010/11 - Blatt 1
(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 22.10.2010, in der Vorlesung)

1. Man zeige folgende Aussagen:

   a) Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei meßbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ meßbar.
   Hinweis : Für $f + g$ zeige man zunächst, dass mit der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gilt
   $$\{x \in M : \; f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s<c}} \big(\{x \in M : \; f(x) < r\} \cap \{x \in M : \; g(x) < s\}\big).$$

   b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist f auch meßbar.
   (**6 Punkte**)

2. Zeigen Sie, dass die Aussage des Satzes von *Egoroff* falsch wird, wenn man auf die Voraussetzung $\mu(M) < \infty$ verzichtet.
   Hinweis : Man betrachte die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k(x) = \chi_{[k,k+1)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei χ die charakteristische Funktion bezeichnet. (**4 Punkte**)

3. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, $\mathcal{M}$ das System der meßbaren Mengen und $M \in \mathcal{M}$. Zeigen Sie:
   $$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 \; : \; \int_E |f(x)|\, dx \; < \; \varepsilon \quad \forall\, E \subset M,\, E \in \mathcal{M} \quad \text{mit} \quad \mu(E) < \delta.$$
   Hinweis : Man zeige die Aussage zunächst für eine einfache integrierbare Funktion. (**4 Punkte**)

4. Man zeige folgende Aussagen:

   a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Dann ist auch die Funktion f^2 meßbar.

   b) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f meßbar.

5. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen auf M sowie $f : M \to \mathbb{R}$ meßbar. Man sagt, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dem Maße nach gegen f konvergiert*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:
   $$\lim_{k\to\infty} \mu\big(\{x \in M : \; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$
   Zeigen Sie: Ist $\mu(M) < \infty$, so konvergiert jede punktweise gegen f konvergente Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch dem Maße nach gegen f.

bitte wenden !

6. Gegeben sei die Funktionenfolge $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) = \chi_{[j2^{-\ell},(j+1)2^{-\ell}]}(x), \qquad \text{falls} \quad k = j + 2^\ell,\ 0 \le j < 2^\ell,\ \ell \ge 0.$$

Skizzieren Sie f_k und zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwar dem Maße nach konvergiert, jedoch für kein $x \in [0,1]$ punktweise konvergent ist.