Musterlösungen Blatt 11

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, Eigenwerte (EW): $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$

Eigenvektoren v_i zu λ_i:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ lin. unabh. Lösungen von $y' = Ay$ sind:

$$y_1(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Fundamentalmatrix:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -e^{4t} & e^{2t} & 3e^{2t} \\ e^{4t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & e^{2t} & 0 \end{bmatrix}$$

2) Man löse das AWP:

$$y' = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}}_{=:A} y + \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(2t) \\ e^t \end{bmatrix}}_{=:b(t)}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- EW von A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$
- Eigenvektoren: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Fundamentalmatrix zur homog. DGL:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^t & -3e^{-2t} \\ -e^t & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$W(t) = \det(Y(t)) = 2e^{-t} - 3e^{-t} = \underline{\underline{-e^{-t}}}$$

$$\Rightarrow Y^{-1}(t) = \underbrace{\frac{1}{-e^{-t}}}_{=-e^{t}} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ e^{t} & e^{t} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2e^{-t} & 3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

- Lösungsformel aus Vorlesung für spezielle Lsg $\bar{y}(t)$

$$\bar{y}(t) = Y(t) \underbrace{\int Y^{-1}(t) \cdot b(t)\, dt}_{=c(t)}$$

(Vektor aus Variation der Konst.)

$$Y^{-1}(t) \cdot b(t) = -\begin{bmatrix} 2e^{-t} & 3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ e^{t} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2e^{-t}\sin(2t) + 3 \\ e^{2t}\sin(2t) + e^{3t} \end{bmatrix}$$

- mit Hilfe 2-maliger partieller Integration erhält man:

$$\int e^{\alpha x} \sin(\beta x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\Rightarrow \int e^{-t} \sin(2t)\, dt = \frac{-1}{5} e^{-t} \sin(2t) - \frac{2}{5} e^{-t} \cos(2t)$$

$$\int e^{2t} \sin(2t)\, dt = \frac{2}{8} e^{2t} \sin(2t) - \frac{2}{8} e^{2t} \cos(2t)$$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}e^{-t}\sin(2t) + \frac{4}{5}e^{-t}\cos(2t) - 3t \\ -\frac{1}{4}e^{2t}\sin(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}\cos(2t) - \frac{1}{3}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & -3e^{-2t} \\ -e^{t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix} c(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{bmatrix}$$

mit $\bar{y}_1(t) = \frac{2}{5}\left(\sin(2t) + 2\cos(2t)\right) - 3te^{t}$

$$+ \frac{3}{4}\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right) + e^{t}$$

$$\boxed{\bar{y}_1(t) = \frac{23}{20}\sin(2t) + \frac{1}{20}\cos(2t) - 3te^{t} + e^{t}}$$

$$\bar{y}_2(t) = -\frac{2}{5}\sin(2t) - \frac{4}{5}\cos(2t) + 3te^{t}$$

$$-\frac{2}{4}\sin(2t) + \frac{2}{4}\cos(2t) - \frac{2}{3}e^{t}$$

$$\boxed{\bar{y}_2(t) = \frac{-18}{20}\sin(2t) - \frac{6}{20}\cos(2t) + 3te^{t} - \frac{2}{3}e^{t}}$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung des DGL-Systems:

$$y(t) = \bar{y}(t) + c_1 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>AB</u>: $y(0) = \bar{y}(0) + c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{y}_1(0) \\ \bar{y}_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} + 1 \\ -\frac{3}{10} - \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/20 \\ -29/30 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=:M} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/20 \\ -1/30 \end{bmatrix}$$

$\det(M) = -1 \Rightarrow$ mit Cramer'scher Regel

$$c_1 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{20} & -3 \\ -\frac{1}{30} & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \left\{ -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} \right\} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

$$c_2 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{20} \\ -1 & -\frac{1}{30} \end{vmatrix} = -\left\{ -\frac{1}{30} - \frac{1}{20} \right\} = \frac{5}{60}$$

$\Rightarrow$ Lösung:

$$\underline{\underline{y(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{5} e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{60} e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

3.) inhomog. DGL: $\boxed{y''' - 3y' + 2y = 9e^t}$

a) <u>Fundamentalsystem zur homog. DGL:</u>

- <u>Ansatz</u>: $y(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \boxed{\lambda_1 = +1}$

- $(\lambda^3 - 3\lambda + 2) : (\lambda - 1) = \underline{\underline{\lambda^2 + \lambda - 2}}$

$$\begin{array}{l} \lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline +\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 - \lambda \\ \hline -2\lambda + 2 \\ -2\lambda + 2 \\ \hline - \end{array}$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2}$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $\boxed{y_1(t) = e^t, \; y_2(t) = t e^t, \; y_3(t) = e^{-2t}}$

b) spezielle Lsg der inhomog. DGL mittels Variation der Konstanten

- nach Vorlesung (wir wählen $\eta_i = 0$ und verzichten auf die AB) ist eine spezielle Lsg:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} y_i(t) \underbrace{\int \frac{W_i(t)}{W(t)} b(t)\,dt}_{\text{Stammfkt.}}$$

wobei

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-2t} \\ e^t & (1+t)e^t & -2e^{-2t} \\ e^t & (2+t)e^t & 4e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{e^t \cdot e^t \cdot e^{-2t}}_{=1} \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 1 & t+2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -\text{Zei } 1 \\ -\text{Zei } 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{9}}$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} te^t & e^{-2t} \\ (t+1)e^t & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = e^t \cdot e^{-2t} \begin{vmatrix} t & 1 \\ t+1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\underline{e^{-t}(-3t-1)}}$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = e^t \cdot e^{-2t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-3e^{-t}}}$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{e^{2t}}}$$

$$b(t) = 9e^t$$

Bl.11

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = (-1)^4 y_1(t) \int \frac{1}{9} e^{-t}(-3t-1)\, 9 e^t \, dt$$

$$+ (-1)^5 y_2(t) \int \frac{1}{9} \cdot \left(-3 e^{-t}\right) 9 e^t \, dt$$

$$+ (-1)^6 y_3(t) \int \frac{1}{9} e^{2t} \cdot 9 e^t \, dt$$

$$= e^t \int (-3t-1)\, dt - t e^t \int (-3)\, dt + e^{-2t} \int e^{3t} dt$$

$$= e^t \left(-\frac{3}{2}t^2 - t\right) + 3t^2 e^t + e^{-2t} \cdot \frac{1}{3} e^{3t}$$

$$= e^t \left(-\frac{3}{2}t^2 - t + 3t^2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \underline{\underline{e^t \left(\frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{3}\right)}}$$