Musterlösungen Blatt 10

① $\mathcal{X} := \{ y \in C^0(I, \mathbb{R}^n) : y(t) \in \overline{B_r(y_0)} \ \forall t \in I \}$

$$d(y, \tilde{y}) := \max_{t \in I} e^{-|t-t_0|\alpha} |y(t) - \tilde{y}(t)|$$

<u>wir zeigen die Axiome für $d(\cdot,\cdot)$:</u>

- $d(y,\tilde{y}) = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{-\alpha|t-t_0|}}_{>0} |y(t) - \tilde{y}(t)| = 0 \quad \forall t \in I$

  $\Rightarrow |y(t) - \tilde{y}(t)| = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow y = \tilde{y}$

- falls $y = \tilde{y}$, so folgt offensichtlich $d(y, \tilde{y}) = 0$

- $d(y, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, y)$, folgt aus $|y(t) - \tilde{y}(t)| = |\tilde{y}(t) - y(t)|$

- <u>z.z.:</u> $\boxed{d(y, \tilde{y}) \leq d(y,z) + d(z, \tilde{y})}$ (1)

  <u>Bew</u>: aus der Δ-Ungleichung für die Euklid. Norm $|\cdot|$ folgt $\forall t \in I$:

  $$e^{-\alpha|t-t_0|} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leq e^{-\alpha|t-t_0|} \{ |y(t) - z(t)| + |z(t) - \tilde{y}(t)| \}$$

  $$\leq d(y,z) + d(z, \tilde{y})$$

  durch Übergang zum Maximum auf der linken Seite erhält man (1) ☐

<u>wir zeigen die Vollständigkeit von $(\mathcal{X}, d)$:</u>

- sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : d(y_n, y_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha|t-t_0|} |y_n(t) - y_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I, \ m, n > n_0(\varepsilon)$$

wegen $e^{-\alpha|t-t_0|} \in [e^{-\alpha\delta}, 1]$ folgt

$$|y_n(t) - y_m(t)| < \frac{\varepsilon}{e^{-\alpha\delta}} \quad \forall t\in I,\ m,n > n_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \|y_n - y_m\|_{C^0(I,\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \cdot e^{\alpha\delta} \quad \forall m,n > n_0(\varepsilon)$$

- da der Raum $C^0(I,\mathbb{R}^n)$ mit der Maximum-Norm vollständig ist, existiert ein Grenzwert $y^* \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ mit

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists n_1(\varepsilon): \ \|y_n - y^*\|_{C^0(I,\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad \forall n,m > n_1(\varepsilon)} \quad (2)$$

$$\Rightarrow d(y_n, y^*) \le \max_{t\in I} \underbrace{e^{-\alpha|t-t_0|}}_{\le 1} |y_n(t) - y^*(t)|$$

$$\le \|y_n - y^*\| < \varepsilon \quad \forall n,m > n_1(\varepsilon)$$

- <u>offenbar ist $y^* \in X^\rho$</u>, denn aus $y_n \in X^\rho \ \forall n$ folgt

$$|y_n(t) - y_0| \le r \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \forall t\in I$$

Grenzübergang $n\to\infty$ bei festem t liefert (da $|\cdot|$ stetig)

$$|\underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n(t)}_{= y^*(t) \text{ wegen } (2)} - y_0| \le r \quad \forall t\in I$$

$$\Rightarrow y^*(t) \in \overline{B_r(y_0)} \quad \forall t \in I \quad \Rightarrow y^* \in X^\rho \quad \square$$

Bl.10
-3-

(2) <u>Vor</u>: $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, $f(y)>0 \;\; \forall y<0$

<u>z.z</u>: Lsg. des AWP $\boxed{y' = f(y),\ y(0)=y_0<0}$ ex. $\forall t \geq 0$

<u>und</u> $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$

<u>Bew</u>: • Umformulierung des AWP:

sei $\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(t,y) := f(y)$, $D \in \mathbb{R}^2$

unser AWP ist dann äquivalent zu

$$\boxed{y' = \tilde{f}(t,y),\ y(0)=y_0<0} \qquad (1)$$

• $\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$ ist wegen $f \in C^1(\mathbb{R})$ stetig <u>und</u> lokal L-stetig bzgl. y

$\Rightarrow$ $\exists$ max. Existenz-Intervall $I_{max} = (t_-, t_+)$ auf dem die Lösung $y(t)$ des AWP existiert

<u>Annahme</u>: t_+ wäre endlich

• da $\partial D = \emptyset$, folgt $\boxed{\lim\limits_{t\nearrow t_+} |y(t)| = \infty}$ (2)

<u>1. Fall</u>: $\exists t_1 > 0 : y(t_1) = 0$

$\Rightarrow y'(t_1) = f(y(t_1)) = f(0) = 0$

dann wäre $y(t) = \begin{cases} y(t), & t \leq t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$ Lösung

$\Rightarrow t_+ = \infty$ <u>Wdspr.</u> !

<u>2. Fall</u>: $y(t) < 0 \;\; \forall t \in (t_-, t_+)$

$\Rightarrow |y(t)|$ ist beschränkt $\forall t \in [t_+ - \delta, t_+)$, $\delta > 0$

<u>Wdspr.</u> zu (2) !

$\Rightarrow$ Ann. war falsch $\Rightarrow$ $t_+ = +\infty$

$\Rightarrow$ Lsg. $y(t)$ existiert $\forall\, t \geq 0$ und ist <u>eindeutig</u>!

<u>Nachweis von $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ (3):</u>

• <u>Ann</u>: $\exists\, t_1 > 0 : y(t_1) > 0$

• da $y(0) = y_0 < 0$, folgt nach Zwischenwertsatz (denn $y(t)$ ist stetig), dass

$\exists\, t_2 \in (0, t_1) : y(t_2) = 0$

$\Rightarrow$ $\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & , t \leq t_2 \\ 0 & , t > t_2 \end{cases}$ ist Lösung ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ $y(t_1) = 0$ (da Lösung eindeutig) <u>Wdspr</u>!

$\Rightarrow$ <u>Ann</u> falsch $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) \leq 0 \quad \forall\, t \in [0, \infty)}$ (4)

$$\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \quad y'(t) = f(\underbrace{y(t)}_{\leq 0}) \geq 0 \quad \forall\, t \in [0, \infty)$$

$y(t)$ ist also mon. wachsend u. nach oben durch 0 beschränkt

$\Rightarrow$ $\exists$ Grenzwert $\boxed{g = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) \leq 0}$ (5)

• <u>Ann</u>: $g < 0$. Da f stetig u. $y'(t)$ stetig, folgt

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} f(y(t)) = f(g) > 0$$

$\Rightarrow$ $\exists\, R > 0 : \quad y'(t) \geq \frac{1}{2} f(g) \quad \forall\, t \geq R$

$$\Rightarrow \forall\, t \geq R: \quad y(t) = y(R) + y'(R + \vartheta(t-R))\,(t-R)$$
$$\geq y(R) + \tfrac{1}{2} f(g)\,(t-R) \qquad \vartheta \in (0,1)$$

$\Rightarrow$ mit $t \to \infty$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$ Wdspr. zu (5)

$\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow g = 0 \Rightarrow$ (3) □

3 AWP: $$y' = \underbrace{\frac{e^{t^2} y^5}{1+y^4} \arctan(t^3 y) + \cos\left(\frac{y}{1+t^2}\right)}_{=: f(t,y)}, \quad y(t_0) = y_0$$

z.z: $\exists$ eind. Lsg. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Bew: • $f: D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}^2$, ist stetig, da es eine Verknüpfung aus lauter stetigen Fkt'nen ist u. die Nenner niemals Null werden

• ebenso ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig

• nach Satz 2.9 $\exists$ max. Ex.intervall $I_{max} = (t_-, t_+)$, auf dem die Lösung existiert u. eindeutig ist

• f(t,y) wächst höchstens linear in y, denn:

$$|f(t,y)| \le \frac{e^{t^2}|y|^5}{|y|^4} \cdot \frac{\pi}{2} + |\cos(\dots)|$$

$$\le \underbrace{1}_{\delta(t)} + \underbrace{\tfrac{\pi}{2} e^{t^2}}_{\rho(t)} |y| \qquad \forall t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$\delta, \rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sind stetig

nach Satz 2.10 existiert jede Lsg auf ganz $I = \mathbb{R}$

• da f stetig u. lokal L-stetig bzgl. y, ist die Lösung auf ganz $I = \mathbb{R}$ eindeutig □

(4) <u>Vor</u>: $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig + stetig diff'bar bzgl. y

<u>z.z</u> (mittels Satz 2.9): $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ Lsg. $y(t)$ von

$$\boxed{y' = \underbrace{f(t,y)\sin(|y|)}_{=:\tilde{f}(t,y)}\,, \quad y(0) = y_0} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

<u>Bew</u>: <u>wir zeigen, dass $\tilde{f}$ ~~ist~~ lok.-L-stetig bzgl. y</u>

- über die Δ-Ungl. erhält man

$$-|y_2 - y_1| \le |y_1| - |y_2| \le |y_1 - y_2|$$

$$\Rightarrow \quad \big|\,|y_1| - |y_2|\,\big| \le |y_1 - y_2| \qquad (1)$$

- nach Mittelwertsatz gilt

$$|\sin(|y_1|) - \sin(|y_2|)| \le \big|\cos(\xi)\cdot(|y_1| - |y_2|)\big|$$
$$\overset{(1)}{\le} |y_1 - y_2| \qquad (2)$$

- sei $g(y) := \sin(|y|) \in [-1,1] \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n$

- da f stetig diff'bar bzgl. y, ist f auch lokal L-stetig bzgl. y, d.h.

$$\left.\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\cdot|y_1 - y_2| \quad &\forall\, t \in I_r \\ &y_1, y_2 \in \overline{B}_r \end{aligned}\right\}(3)$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(t,y_1) - \tilde{f}(t,y_2)| = \big|f(t,y_1)[g(y_1) - g(y_2)] + g(y_2)[f(t,y_1) - f(t,y_2)]\big|$$

$$\le f_{max}\underbrace{|g(y_1) - g(y_2)|}_{\overset{(2)}{\le}\,|y_1 - y_2|} + \underbrace{g_{max}}_{=1}|f(t,y_1) - f(t,y_2)|$$

(3) $\Rightarrow |\tilde{f}(t,y_1) - \tilde{f}(t,y_2)| \leq \underbrace{\{f_{max} + L\}}_{=:\tilde{L}} |y_1 - y_2|$ ◻

- nach Satz 2.9 existiert eine eindeutige Lösung auf dem max. Ex.intervall $I_{max} = (t_-, t_+)$

Ann: t_+ wäre endlich

- nach Satz 2.9 folgt (da $\partial D = \emptyset$) $\lim_{t \to t_+} |y(t)| = \infty$
- da die Fkt. $\varphi : [0, t^+) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := |y(t)|$ stetig ist, folgt nach Zwischenwertsatz, dass $\varphi(t)$ jeden Wert zwischen $\varphi(0) = |y_0|$ und $\infty = \lim_{t \to t^+} \varphi(t)$ annimmt

$\Rightarrow \exists\, t_1 \in [0, t_+)$ mit $\varphi(t_1) = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y'(t_1) = f(t_1, y(t_1)) \sin(k\pi) = 0$

$\Rightarrow$ die Fkt. $\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t), & t \leq t_1 \\ \cancel{\emptyset}\, y(t_1), & t > t_1 \end{cases}$ ist Lsg.

$\Rightarrow t_+ = \infty$ Wdspr. zur Ann !

$\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow \underline{t_+ = +\infty}$

- analog beweist man: $t_- = -\infty$