Musterlösungen Blatt 9

1) Bestimmung des ersten Integrals:

$$y_1' = (\alpha - \beta y_2)\, y_1 \quad \Big| \cdot \frac{-\gamma + \delta y_1}{y_1}$$
$$y_2' = (-\gamma + \delta y_1)\, y_2 \quad \Big| \cdot \frac{\alpha - \beta y_2}{y_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\gamma + \delta_1 y_1}{y_1}\, y_1' = \frac{\alpha - \beta y_2}{y_2}\, y_2' \quad \Big| \int \ldots dt$$

$$\int \left(-\frac{\gamma}{y_1} + \delta_1\right) dy_1 = \int \left(\frac{\alpha}{y_2} - \beta\right) dy_2$$

$$-\gamma \ln(\underbrace{y_1}_{>0}) + \delta y_1 = \alpha \ln(y_2) - \beta y_2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{F(y_1, y_2) := -\gamma \ln(y_1) + \delta y_1 - \alpha \ln(y_2) + \beta y_2} = C$$

d.h. $F(\cdot,\cdot)$ ist erstes Integral

Bestimmung aller globalen Extrema von F:

$$\nabla F = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{y_1} + \delta \\ -\frac{\alpha}{y_2} + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} y_1 = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_2 = \frac{\alpha}{\beta} \end{array}$$

Hesse-Matrix: $H_F(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{y_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{y_2^2} \end{pmatrix}$

ist pos. definit $\forall (y_1, y_2) \in D$, da $\alpha, \gamma > 0$

$\Rightarrow$ F ist streng konvex auf

$\Rightarrow$ F hat ein einziges globales Minimum, nämlich

$$(y_1, y_2) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

- sei $y_0 \in D$ globales Extremum von $F(\cdot,\cdot)$

und $y(t)$ Lösung von $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$

$$\Rightarrow \quad F(y(t)) = c = F(y_0) \quad \forall\, t \in [t_0, T)$$

- da $y_0 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ einziges globales Extremum von F ist, gilt für die Niveaumenge

$$N_c = \{ y \in D \;:\; F(y) = F(y_0) \} = \{y_0\}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_0 \quad \forall\, t \qquad \blacksquare$$

2) z.z.: $\boxed{\left| \int_a^b z(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |z(t)|\,dt \quad \forall\, z \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)}$ (1)

- Zerlegung von $[a,b]$ sei:

$$t_i = a + ih, \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n$$

- da $z \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$, gilt

$$I = \int_a^b z(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n z(t_i)\,\frac{b-a}{n}$$

- da die Euklidische Norm $|\cdot|$ stetig ist, folgt

$$|I| = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n z(t_i)\,\frac{b-a}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=1}^n z(t_i)\,\frac{b-a}{n} \right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |z(t_i)|\,\frac{b-a}{n}$$

$$= \int_a^b |z(t)|\,dt, \quad \text{da auch } |z| \in C^0([a,b], \mathbb{R})$$

d.h. es gilt (1) $\blacksquare$

3) <u>Vor</u>:
- $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig
- f lokal L-stetig bzgl. y
- $f(-t, y) = -f(t, y) \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

<u>Beh</u>: Falls $y: [-a,a] \to \mathbb{R}^n$ Lösung von $y' = f(t,y)$, so gilt $y(-t) = y(t) \ \forall t \in [-a,a]$

<u>Bew</u>:

- sei $y_0 := y(0)$ und $y_1(t) := y(t) \quad \forall t \in [0,a]$
  $y_2(t) := y(-t) \quad \forall t \in [0,a]$

- dann gilt

$$\underline{\underline{y_2'(t)}} = -y'(-t) = -f(-t, y(-t))$$
$$= f(t, y(-t)) = \underline{\underline{f(t, y_2(t))}}$$

- also sind $y_{1,2}(t)$ beide Lösungen des AWP

$$y' = f(t,y), \quad y(0) = y_0.$$

- auf Grund der lokalen L-Stetigkeit von f ist die Lösung eindeutig, d.h.

$$y(t) = y_1(t) = y_2(t) = y(-t) \quad \forall t \in [0,a]$$

- ersetzt man t durch $-t$, so erhält man auch

$$y(-t) = y(t) \quad \forall t \in [-a,0]$$

$\boxed{\text{W}}$