Musterlösungen Blatt 8

① alle Lösungen von : $\boxed{y' = \frac{2y(y-1)}{t(2-y)}}$ $\Rightarrow t \neq 0$

• TdV : $$\int \frac{2-y}{y(y-1)}\,dy = \int \frac{2}{t}\,dt \qquad (1)$$

• Partialbruchzerlegung : $$\frac{2-y}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{2}{y}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \ln|y-1| - \ln|y|^2 = 2\ln|t| + C$$

$$\ln\frac{|y-1|}{y^2} = \ln t^2 + C$$

$$\frac{|y-1|}{y^2} = t^2 \cdot \underbrace{e^C}_{=c_1>0} \qquad (2)$$

1. Fall : $y \geq 1$

$$(2) \Rightarrow \quad y - 1 = c_1 t^2 y^2$$

$$y^2 - \frac{1}{c_1 t^2} y + \frac{1}{c_1 t^2} = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c_1t^2}}{2c_1t^2}$$

ist „-" Lösung > 1 : $\Leftrightarrow \quad 1 - 2c_1t^2 \overset{?}{>} \sqrt{1-4c_1t^2}$

$$\Leftrightarrow 1 - 4c_1t^2 + \underbrace{4c_1^2t^4}_{>0} \overset{?}{>} 1 - 4c_1t^2$$ wahre Auss.

$\Rightarrow$ beide Lösungen $y_{1,2}$ sind > 1

notw. Bed für t : $1 - 4c_1t^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow |t| \leq \sqrt{\frac{1}{4c_1}}$$

2. Fall: $y < 1$

(2) $\Rightarrow \quad 1 - y = c_1 t^2 \cdot y^2$

$$y^2 + \frac{1}{c_1 t^2} y - \frac{1}{c_1 t^2} = 0$$

$$y_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 c_1 t^2}}{2 c_1 t^2}$$

analog zu Fall 1 sieht man, dass „+"-Lösung < 1

$\Rightarrow$ beide Lösungen $y_{3,4}$ sind < 1

stationäre Lösungen, wenn $y(t) = 0$

oder $y(t) = 1$

(2) Löse AWP: $\boxed{y' = (t+y)^2, \quad y(0) = 0}$

Subst.: $z(t) = t + y(t) \quad \Rightarrow z' = 1 + y'$

$\Rightarrow \quad y' = z' - 1 = z^2 \quad \Rightarrow \quad z' = z^2 + 1$

TdV $\Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2+1} = \int 1 \, dt$

$$\arctan(z) = t + c$$

$$z = \tan(t + c)$$

$\Rightarrow \quad y(t) = \tan(t+c) - t$

$y(0) = \tan(c) - 0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$ (oder $c = k\pi$, dies ändert aber nicht die Lösung)

$\Rightarrow$ Lösung: $\boxed{y(t) = \tan(t) - t}$

(3) alle Lösungen von: $\boxed{y' = \frac{y}{t}\left(\frac{y}{t} + 1\right), \ t > 0}$

<u>Subst.:</u> $z(t) = \frac{y(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{t} y' - \frac{1}{t^2} y$

$$\Rightarrow \quad y' = t \cdot z' + \underbrace{\boxed{\frac{y}{t}}}_{= z} = z(z+1)$$

$$\Rightarrow \quad t \cdot z' = z^2$$

<u>TdV</u> $\Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dt}{t}$

$$-\frac{1}{z} = \ln|t| + c$$

$$z = \frac{-1}{\ln|t| + c}$$

$$\overset{t>0}{\Rightarrow} \quad y(t) = \frac{-t}{\ln(t) + c}$$

(4) löse das AWP: $\boxed{y' + 3t^2 y = 6t^5, \ y(0) = 5}$

- <u>homogene Lsg</u> $\quad y_h' + 3t^2 y_h = 0$

TdV: $\quad \int \frac{dy_h}{y_h} = -\int 3t^2 \, dt$

$$\ln|y_h| = -t^3 + C$$

$$\Rightarrow \quad y_h = \underbrace{\pm e^C}_{= c_1} e^{-t^3}$$

- <u>partikuläre Lsg</u>: $\quad y_p(t) = c_1(t) \, e^{-t^3}$

$$y_p' = c_1' \cdot e^{-t^3} + c_1(-3t^2) e^{-t^3} \overset{!}{=} 6t^5 - 3t^2 \underbrace{c_1 \cdot e^{-t^3}}_{y_p}$$

$$\Rightarrow \quad c_1' = 6t^5 e^{t^3}$$

$$c_1(t) = \int 6t^5 e^{t^3} dt$$

<u>Subst</u>: $z = t^3$, $dz = 3t^2\, dt$

$$\Rightarrow c_1(t) = \int 2\cdot(3t^2)\cdot \underbrace{t^3}_{z} e^{z}\, dt$$

$$= 2\int \underbrace{z}_{u}\underbrace{e^{z}}_{v'}\, dz = 2\cdot\left\{ z e^{z} - \int 1\cdot e^{z}\, dz \right\}$$

$$= 2(z-1)e^{z}$$

$$= 2(t^3-1)e^{t^3}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = 2(t^3-1)$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung: $y(t) = 2(t^3-1) + c_1 e^{-t^3}$

- Aufangsbed.: $y(0) = -2 + c_1 \overset{!}{=} 5 \Rightarrow c_1 = 7$

$\Rightarrow$ Lösung: $y(t) = 2(t^3-1) + 7\cdot e^{-t^3}$