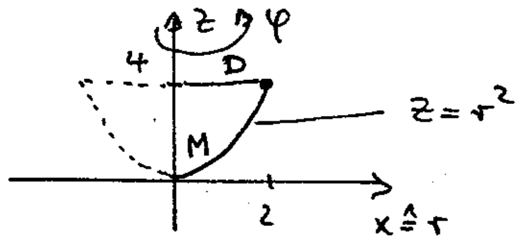
Musterlösungen Blatt 7

1a) Schnittebene $y = 0$



$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} < z < 4\}$$

$$\partial\Omega = D \cup M$$

$$M := \{(x,y,z) \in \partial\Omega : x^2+y^2 = z\}$$

- Parametrisierung von D:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi^D(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi) \in (0,2) \times (0,2\pi)$$

$$\nu(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F \cdot \nu = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{3}}$$

$$\Rightarrow I_D := \int_D F \cdot \nu \, dS = \int_D 3 \, dS = 3 \underbrace{\mathrm{vol}_2(D)}_{\text{Kreis mit Radius } 2} = \underline{\underline{12\pi}}$$

- Parametrisierung von M:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi^M(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi) \in (0,2) \times (0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \vec{N}(r,\varphi) = \frac{\partial \phi^M}{\partial r} \times \frac{\partial \phi^M}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} e_1 & \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ e_2 & \sin\varphi & r\cos\varphi \\ e_3 & 2r & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

Richtung von $\vec{N}$: $r = 1, \varphi = 0 \to \vec{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zeigt nach innen bzgl. Ω

$$\Rightarrow \nu = \frac{-\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

$$I_M := \int_M F \cdot \nu \, dS = \int_{(0,2)\times(0,2\pi)} F \cdot \frac{(-\vec{N})}{\|\vec{N}\|} \cdot \|\vec{N}\| \, d(r,\varphi)$$

$$= \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix} d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^3 - 3r\right) d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{4} r^4 - \frac{3}{2} r^2 \right]_{r=0}^{2} = \underline{\underline{4\pi}}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS = I_D + I_M = \underline{\underline{16\pi}}$$ Fluß des Vektorfeldes F durch $\partial\Omega$

1b) <u>über Satz von Gauß</u>

$$I = \int_\Omega \operatorname{div} F \, d\underline{x} \quad , \quad \operatorname{div} F = \operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

$$\Omega = \phi(U) \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

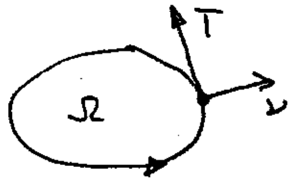
$$U = \left\{ (r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 : (r,\varphi) \in (0,2)\times(0,2\pi) \, , \, z \in (r^2, 4) \right\}$$

$$\Rightarrow I = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=r^2}^{4} 2 \cdot r \, dz \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2r\left(4 - r^2\right) d\varphi \, dr$$

$$= 4\pi \left[\frac{4}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{2} = \underline{\underline{16\pi}}$$

2a)



$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2$$

$$\overset{\text{Gauß}}{\Longrightarrow} \quad \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{=2} d(x,y) = \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\nu \, dS(x,y) \qquad (1)$$

• Tangentialvektor: $T = \gamma'(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}$

ist Normalvektor nach außen bzgl. Ω

$$\Rightarrow \nu = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad 2\cdot \underbrace{\int_\Omega 1 \, d(x,y)}_{=\mu_2(\Omega)} = \int_{t=a}^{b} \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}\cdot \underbrace{\frac{1}{\|\vec{N}\|}\cdot\|\gamma'(t)\|}_{=1} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b (\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1')\, dt} \qquad \text{q.e.d.}$$

2b) Kurve C: $r(\varphi) = \sin(2\varphi)$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\overset{\varphi=t}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(2t)\cos t\\ \sin(2t)\sin t\end{pmatrix}, \quad t\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \gamma_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos(2t)\cos t - \sin(2t)\sin t\\ 2\cos(2t)\sin t + \sin(2t)\cos t\end{pmatrix} \qquad \text{nutze } \boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \gamma_1\gamma_2' = \frac{1}{2}\sin(4t)\sin(2t) + \sin^2(2t)\cos^2 t$$

$$\gamma_2\gamma_1' = \frac{1}{2}\sin(4t)\sin(2t) - \sin^2(2t)\sin^2 t$$

$$\Rightarrow \gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1' = \sin^2(2t) = \frac{1}{2}\left[1-\cos(4t)\right]$$

$$\Rightarrow \mu_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[1-\cos(4t)\right] dt = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$$

3a) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\boxed{f(tx) = t^k f(x)}$ (1)

$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

• wir zeigen zunächst: $\boxed{\nabla f(x) \cdot x = k f(x)}$ (2)

aus $f(tx) = t^k f(x)$ für festes x folgt durch Ableitung nach t

$$\nabla f(tx) \cdot x = k t^{k-1} f(x) \overset{t=1}{\Longrightarrow} (2) \quad \blacksquare$$

• wegen $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ folgt nach Satz von Gauß:

$$\int_{B_1(0)} \Delta f \, dx = \int_{\partial B_1(0)} \nabla f \cdot \nu \, dS(x), \quad \nu = x \text{ und } \partial B_1(0) = S^{n-1}$$

$$= \int_{S^{n-1}} \nabla f \cdot x \, dS(x)$$

$$\overset{(2)}{=} k \int_{S^{n-1}} f(x) \, dS(x) \implies \text{Behauptung} \quad \blacksquare$$

3b) z.z.: $\boxed{\mu_n(B_1(0)) = \int_{S^{n-1}} x_j^2 \, dS(x)}$ (3)

Bew.: • sei $f(x) := x_j^2$, dann ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

u. es gilt $f(tx) = (tx_j)^2 = t^2 x_j^2 = t^2 f(x)$

d.h. es gilt (1) mit $k = 2$

• nach 3a) u. mit $\Delta f = 2$ folgt

$$2 \cdot \underbrace{\int_{\Omega = B_1(0)} 1 \cdot dx}_{= \mu_n(B_1(0))} = 2 \cdot \int_{S^{n-1}} x_j^2 \, dS(x) \implies (3) \quad \blacksquare$$