Musterlösungen

1a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2,\ 0 \le z \le H\}$

$f: M \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

• Parametrisierung von M: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $\varphi \in (0,2\pi)$

$(x,y,z) = \phi(R,\varphi,z)$ mit $z \in (0,H)$

• $\vec{N}(\varphi,z) = \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\phi}{\partial z} = \begin{vmatrix} e_1 & -R\sin\varphi & 0 \\ e_2 & R\cos\varphi & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ +R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

• $M = \phi(u)$, $u = (u_1,u_2) = (\varphi,z) \in \Omega = (0,2\pi)\times(0,H)$

$$\Rightarrow I = \int_M f(x,y,z)\, dS(x,y,z) = \int_\Omega f\circ\phi\, \underbrace{\|\vec{N}\|}_{=\sqrt{g(u)}}\, d\varphi\, dz$$

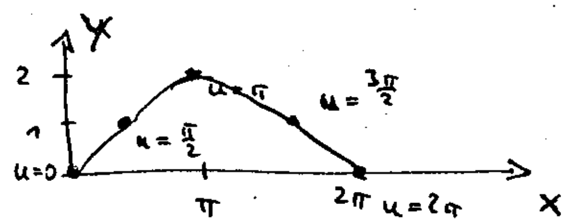
$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \underbrace{(R^2+z^2)}_{f\circ\phi}\cdot \underbrace{R}_{\|\vec{N}\|}\, dz\, d\varphi$$

$$= R\cdot\int_0^{2\pi} \left\{R^2 z + \frac{1}{3}z^3\right\}\Big|_{z=0}^{H}\, d\varphi$$

$$\underline{\underline{= 2\pi\cdot R\cdot\left\{R^2 H + \frac{1}{3}H^3\right\}}}$$

1b) $\varphi(u) = \begin{pmatrix} u - \sin u \\ 1-\cos u \end{pmatrix}$, $u \in (0,2\pi)$

• Skizze von $C = \varphi((0,2\pi))$:



• L = Länge von C

$$L = \int_C 1\cdot dS(x,y)$$

$$= \int_{u=0}^{2\pi} 1\cdot\|\varphi'(u)\|\, du = \int_0^{2\pi} \left\|\begin{pmatrix} 1-\cos u \\ \sin u \end{pmatrix}\right\| du$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos u+1}\, du = \int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos u)}\, du$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{u}{2}}\, du = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{u}{2}\, du$$

$$= 2 \cdot 2 \left(- \cos \frac{u}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 4 \cdot (1 + 1) = \underline{\underline{8}}$$

(2) $M := \{ x = (u, \Psi(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in \Omega \}$, $\Psi \in C^1(\Omega)$

z.z.: $$\boxed{\int_M f(x)\, dS(x) = \int_\Omega f(u, \Psi(u)) \sqrt{1 + \|\nabla \Psi(u)\|^2}\, du} \quad (1)$$

- Parametrisierung von M: $x = \varphi(u) := (u, \Psi(u))$, $u \in \Omega$

$$\Downarrow$$

- Gram'sche Matrix: $D\varphi = \left[\frac{E_{n-1}}{\nabla\Psi(u)^T}\right] \in \mathbb{R}^{n \times n-1}$

$$G(u) := D\varphi^T \cdot D\varphi =$$

$$= \left[E_{n-1} \,\middle|\, \nabla\Psi(u) \right] \left[\frac{E_{n-1}}{\nabla\psi(u)^T}\right] = E_{n-1} + \underbrace{\nabla\Psi(u)}_{a} \cdot \underbrace{\nabla\Psi(u)^T}_{a^T}$$

- sei $A := \nabla\Psi(u) \cdot \nabla\Psi(u)^T$ symm. Matrix
- Eigenwerte von A: $Ax = \lambda x$

$$(\nabla\Psi \cdot \nabla\Psi^T)\, x = \lambda x \quad | \cdot \nabla\Psi^T$$

$$\underbrace{(\nabla\Psi^T \cdot \nabla\Psi)}_{= \|\nabla\Psi\|^2} \cdot (\nabla\Psi^T x) = \lambda\, \nabla\Psi^T \cdot x$$

$\Rightarrow$ zu $\lambda = 0$ sind alle Vektoren $x \perp \nabla\Psi(u)$ Eigenvektoren

zu $\lambda = \|\nabla\Psi(u)\|^2$ ist $x = \nabla\Psi(u)$ Eigenvektor

$\Rightarrow$ die Eigenwerte von A sind:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n = \|\nabla\Psi(u)\|^2$$

$\Rightarrow$ die Eigenwerte von $G(u) = E_{n-1} + A$ sind

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 1, \quad \lambda_n = 1 + \|\nabla\Psi(u)\|^2$$

- da $\cancel{A}$ $G(u)$ symmetrisch, gibt es eine Diagonalisierung, d.h.

$$G(u) \cancel{A} = Q^T \Lambda Q, \quad \text{mit } \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i, i=1,\dots,n)$$
$$Q^T = Q^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(G(u)) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(\Lambda) \det(Q)$$
$$= \underbrace{\det(Q^{-1} \cdot Q)}_{=1} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 + \|\nabla\Psi(u)\|^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(u)} = \sqrt{1 + \|\nabla\Psi(u)\|^2}$$

$$\Rightarrow \int_M f(x)\, dS(x) = \int_\Omega f(u, \Psi(u)) \underbrace{\sqrt{1 + \|\nabla\Psi(u)\|^2}}_{= \sqrt{g(u)}}\, du$$

$\square$

(3) $a > b > 0$, $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 < b^2\}$

$= \text{Torus}$

- sei $f(x,y,z) := (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 - b^2$
- dann ist $\partial\Omega$ die Niveaumenge

$$\partial\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$$

- es gilt

$$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(\sqrt{x^2+y^2} - a) \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2(\sqrt{x^2+y^2} - a) \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z \end{pmatrix}$$

- $\|\mathrm{grad}\, f\|^2 = 4(\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 \underbrace{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}_{=1} + 4z^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2} = a \quad \text{und} \quad z = 0\right) \Rightarrow f(x,y,z) = -b^2 < 0$$

d.h. $\forall (x,y,z) \in \partial\Omega$ gilt $\| \operatorname{grad} f \| \neq 0$

d.h. $\operatorname{rang}(Df) = 1$

$\Rightarrow$ $\partial\Omega$ ist eine C^1-Mannigfaltigkeit

<u>denn</u>: $f(x,y,z)$ ist offenbar stetig diff'bar in Umgebung von $\partial\Omega$

- <u>Bestimmung des äußeren Einheitsnormalenfeldes $\nu(\cdot)$</u>:

- bekanntlich ist $g := \operatorname{grad} f(x,y,z)$

ein Normalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt (x,y,z)

u. "zeigt" in Richtung des stärksten Wachstums von $f(x,y,z)$, d.h., da $f(x,y,z)=0$ auf $\partial\Omega$, in Richtung positiver f-Werte, d.h. nach außen bzgl. Ω

- demzufolge ist

$$\nu(x,y,z) := \frac{1}{\| \operatorname{grad} f(x,y,z) \|} \operatorname{grad} f(x,y,z)$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}$$